Algèbres Hom-Nambu quadratiques et Cohomologie des algèbres Hom-Nambu-Lie multiplicatives

Sami Mabrouk

UNIVERSITÉ DE SFAX
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE
Laboratoire de Mathématiques,
Informatique et Applications

Thèse / Thesis

par/ by :

Sami MABROUK

sous la direction de / supervised by :

Faouzi AMMAR

Abdenacer Makhlouf

Sujet / subject :

Algèbres Hom-Nambu quadratiques et Cohomologie des algèbres Hom-Nambu-Lie multiplicatives

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Quadratic Hom-Nambu algebras and Cohomology of multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras

Sfax, le 15 décembre 2012

Jury

Mabrouk Ben Ammar (Univ. Sfax)	President
Alice Fialowski (Univ. Budapest)	Referee
Sergei Silvestrov, (Univ. Mälardalen)	Referee
Faouzi Ammar, (Univ. Sfax)	Supervisor
Abdenacer Makhlouf, (Univ. Mulhouse)	Supervisor
Hatem Hamrouni, (Univ. Sfax)	Examiner

Année Universitaire / Academic Year : 2012-2013

Table des matières

Introduction and Summary in english

The first instances of n-ary algebras in Physics appeared with a generalization of the Hamiltonian mechanics proposed in 1973 by Nambu [55]. More recent motivation comes from string theory and M-branes involving naturally an algebra with ternary operation called Bagger-Lambert algebra which gives impulse to a significant development. It was used in [14] as one of the main ingredients in the construction of a new type of supersymmetric gauge theory that is consistent with all the symmetries expected of a multiple M2-brane theory : 16 super-symmetries, conformal invariance, and an SO(8) R-symmetry that acts on the eight transverse scalars. On the other hand in the study of supergravity solutions describing M2-branes ending on M5-branes, the Lie algebra appearing in the original Nahm equations has to be replaced with a generalization involving ternary bracket in the lifted Nahm equations, see [15]. For other applications in Physics see [38], [39], [40].

The algebraic formulation of Nambu mechanics is du to Takhtajan [21, 58] while the abstract definition of n-ary Nambu algebras or n-ary Nambu-Lie algebras (when the bracket is skew symmetric) was given by Filippov in 1985 see [29]. The Leibniz n-ary algebras were introduced and studied in [18]. For deformation theory and cohomologies of n-ary algebras of Lie type, we refer to [10, 11, 23, 24, 32, 58]. For more general works involving operads and where deformation theory is described using a certain differential graded Lie algebras see [27, 31, 36, 54].

The Hom-algebras structures arose first in quasi-deformation of Lie algebras of vector fields. These quasi-deformations lead to quasi-Lie algebras, a generalized Lie algebra structure in which the skew-symmetry and Jacobi conditions are twisted. The first examples were concerned with q-deformations of the Witt and Virasoro algebras (see for example [1, 22]). Motivated by these and the new examples arising as application of the general quasi-deformation construction of [41, 42] on the one hand, and the desire to be able to treat within the same framework such well-known generalizations of Lie algebras as the color and super Lie algebras on the other hand, quasi-Lie algebras and subclasses of quasi-Hom-Lie algebras and Hom-Lie algebras were introduced in [35, 41, 42, 43]. In the subclass of Hom-Lie algebras skew-symmetry is untwisted, whereas the Jacobi identity is twisted by a single linear map and contains three terms as in Lie algebras, reducing to ordinary Lie algebras when the twisting linear map is the identity map. The notion of Hom-associative algebras generalizing associative algebras to a situation where associativity law is twisted by a linear map was introduced by Makhlouf and Silvestrov in [49], where it was shown in particular that the commutator product, defined using the multiplication in a Hom-associative algebra, leads naturally to a Hom-Lie algebra. They introduced also Hom-Lie-admissible algebras and more general G-Hom-associative algebras with subclasses of Hom-Vinberg and pre-Hom-Lie algebras, generalizing to the twisted situation Lie-admissible algebras, G-associative algebras, Vinberg and pre-Lie algebras respectively, and it is shown that for these classes of algebras the operation of taking commutator leads to Hom-Lie algebras as well. The enveloping algebras of Hom-Lie algebras were discussed in [61]. The fundamentals of the formal deformation theory and associated cohomology structures for Hom-Lie algebras have been considered first by Makhlouf and Silvestrov in [51]. Simultaneously, D. Yau has developed elements of homology for Hom-Lie algebras in [62]. In [50, 52], the authors developed the theory of Hom-coalgebras and related structures. They introduced Hom-coalgebra structure, leading to the notions of Hom-bialgebra and Hom-Hopf algebra, proved some fundamental properties and provided examples. Also, They defined the concept of Hom-Lie admissible Hom-coalgebra, and provide their classification based on subgroups of the symmetric group. Generalizations of n-ary algebras of Lie type and associative type by twisting the identities using linear maps have been introduced in [12]. These generalizations include n-ary Hom-algebra structures generalizing the n-ary algebras of Lie type such as n-ary Nambu algebras, n-ary Nambu-Lie algebras and n-ary Lie algebras, and n-ary algebras of associative type such as n-ary totally associative and n-ary partially associative algebras. See also [8, 9, 63, 64, 65].

The aim of this thesis is to study representation theory and cohomology of n-ary Hom-Nambu-Lie algebras, as well as quadratic structures on these algebras. It is organized as follows.

- **Chapter** 1. **n-ary Hom-Nambu algebras** : in the first section we recall the definitions of n-ary Hom-Nambu algebras and n-ary Hom-Nambu-Lie algebras, introduced in [12] by Ataguema, Makhlouf and Silvestrov and provide some key constructions. These algebras correspond to a generalized version by twisting of n-ary Nambu algebras and Nambu-Lie algebras which are called Filippov algebras. We deal in this chapter with a subclass of n-ary Hom-Nambu algebras called multiplicative n-ary Hom-Nambu algebras.

Definition 0.1. *An n-ary* Hom-Nambu *algebra is a triple $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ consisting of a vector space $\mathcal{N}$, an n-linear map $[\cdot, ..., \cdot] : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathcal{N}$ and a family $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ of linear maps $\alpha_i : \quad \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, satisfying*

$$\begin{aligned}&\big[\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]\big] = \\ &\sum_{i=1}^{n} \big[\alpha_1(y_1), ..., \alpha_{i-1}(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], \alpha_i(y_{i+1}), ..., \alpha_{n-1}(y_n)\big],\end{aligned} \tag{0.0.1}$$

for all $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{N}^n$.
The identity (0.0.1) *is called* Hom-Nambu identity.

Remark 0.1. *When the maps $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ are all identity maps, one recovers the classical n-ary Nambu algebras. The Hom-Nambu Identity* (0.0.1)*, for $n = 2$, corresponds to Hom-Jacobi identity (see [49]), which reduces to Jacobi identity when $\alpha_1 = id$.*

Let $(\mathcal{N}, [\cdot, \dots, \cdot], \widetilde{\alpha})$ and $(\mathcal{N}', [\cdot, \dots, \cdot]', \widetilde{\alpha}')$ be two n-ary Hom-Nambu algebras where $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1,\cdots,n-1}$ and $\widetilde{\alpha}' = (\alpha'_i)_{i=1,\cdots,n-1}$. A linear map $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ is an n-ary Hom-Nambu algebras *morphism* if it satisfies

$$\begin{aligned} f([x_1, \cdots, x_n]) &= [f(x_1), \cdots, f(x_n)]' \\ f \circ \alpha_i &= \alpha'_i \circ f \quad \forall i = 1, n-1. \end{aligned}$$

Definition 0.2. *An n-ary Hom-Nambu algebra $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ where $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ is called n-*ary Hom-Nambu-Lie *algebra if the bracket is skew-symmetric that is*

$$[x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)}] = Sgn(\sigma)[x_1, .., x_n], \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad and \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}. \tag{0.0.2}$$

where $\mathcal{S}_n$ stands for the permutation group of n elements.

In the sequel we deal with a particular class of n-ary Hom-Nambu-Lie algebras which we call n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras.

Definition 0.3. *An* n-ary multiplicative Hom-Nambu algebra *(resp.* n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebra*) is an n-ary Hom-Nambu algebra (resp. n-ary Hom-Nambu-Lie algebra) $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ with $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ where $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = \alpha$ and satisfying*

$$\alpha([x_1, .., x_n]) = [\alpha(x_1), .., \alpha(x_n)], \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}. \tag{0.0.3}$$

For simplicity, we will denote the n-ary multiplicative Hom-Nambu algebra as $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ where $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ is a linear map. Also by misuse of language an element $x \in \mathcal{N}^n$ refers to $x = (x_1, .., x_n)$ and $\alpha(x)$ denotes $(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_n))$.

In Section 1.2 , we recall the list of 3-dimensional ternary Hom-Nambu-Lie algebras of special type corresponding to diagonal homomorphisms, provided in [12].

Proposition 0.1. *Every 3-dimensional ternary Hom-Nambu-Lie algebras with diagonal homomorphism is isomorphic to one of the following ternary Hom-Nambu-Lie algebras $(V, [\cdot, \cdot, \cdot]_i, \alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., 5$, with respect to a basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ of V and up to skew-symmetry,* *by*

$$(1)\begin{cases} [e_1,e_2,e_3]_1 = c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3, \\ \alpha_1(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_1(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_1(e_3)=a_3e_3,\ , \\ \beta_1(e_1)=b_1e_1,\ \beta_1(e_2)=\frac{a_2b_1}{a_1}e_2,\ \beta_1(e_3)=\frac{a_3b_1}{a_1}e_3, \\ \textit{where}\ \ \{a_i,b_i,c_i\}_{i=1,2,3}\ \textit{are parameters such that}\ \ a_1\neq 0. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} [e_1,e_2,e_3]_2 = c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3, \\ \alpha_2(e_1)=0,\ \alpha_2(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_2(e_3)=a_3e_3,\ , \\ \beta_2(e_1)=0,\ \beta_2(e_2)=b_2e_2,\ \beta_2(e_3)=\frac{a_3b_2}{a_2}e_3, \\ \textit{where}\ \ \{a_i,b_i\}_{i=,2,3}\,\{c_i\}_{i=1,2,3}\ \textit{are parameters such that}\ \ a_2\neq 0. \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} [e_1,e_2,e_3]_3 = c_2e_2+c_3e_3, \\ \alpha_3(e_1)=0,\ \alpha_3(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_3(e_3)=a_3e_3,\ , \\ \beta_3(e_1)=0,\ \beta_3(e_2)=b_2e_2,\ \beta_1(e_3)=b_3e_3, \\ \textit{where}\ \ \{a_i,b_i,c_i\}_{i=,2,3}\ \textit{are parameters such that}\ \ a_2\neq 0. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} [e_1,e_2,e_3]_4 = c_1e_1, \\ \alpha_4(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_4(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_4(e_3)=a_3e_3,\ , \\ \beta_4(e_1)=b_1e_1,\ \beta_4(e_2)=b_2e_2,\ \beta_4(e_3)=\frac{a_3b_2}{a_2}e_3, \\ \textit{where}\ \ \{a_i,b_i\}_{i=1,2,3},\ c_3\ \textit{are parameters such that}\ \ a_2\neq 0. \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} [e_1,e_2,e_3]_5 = c_1e_1, \\ \alpha_5(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_5(e_2)=0,\ \alpha_5(e_3)=0,\ , \\ \beta_5(e_1)=b_1e_1,\ \beta_5(e_2)=b_2e_2,\ \beta_5(e_3)=b_3e_3, \\ \textit{where}\ \ \alpha_1,\ c_1,\{b_i\}_{i=1,2,3}\ \textit{are parameters such that}\ . \end{cases}$$

where $m_{i,j}=B(e_i,e_j)$ $1\leq i,j\leq 3$ *and* $\{c_i,m_{i,j},\lambda,\mu\}_{1\leq i,j\leq 3}$ *are parameters.*

In Section 1.4 we show different construction procedures. We recall the construction procedures by twisting principles and provide some new constructions using for example the centroid. The first twisting principle, introduced for binary case in [62], was extend to n-ary case in [12]. The second twisting principle was introduced for binary algebras in [63]. We will extend it to n-ary case in the sequel. Also we recall a construction by tensor product of symmetric totally n-ary Hom-associative algebra by an n-ary Hom-Nambu algebra given in [12].

The following Theorem gives a way to construct n-ary multiplicative Hom-Nambu algebras starting from a classical n-ary Nambu algebras and algebra endomorphisms.

Theorem 0.1. *[12] Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot])$ be an n-ary Nambu algebra and let $\rho : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ be an n-ary Nambu algebra endomorphism. Then $(\mathcal{N}, \rho \circ [\cdot, ..., \cdot], \rho)$ is an n-ary multiplicative Hom-Nambu algebra.*

In the following we use the second twisting principal to generate new n-ary Hom-Nambu algebra starting from a given multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra.

Proposition 0.2. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra. Then $(\mathcal{N}, \alpha^{n-1} \circ [\cdot, ..., \cdot], \alpha^n)$, for any integer n, is an n-ary multiplicative Hom-Nambu algebra.*

And more generally we have

Theorem 0.2. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be an n-ary Hom-Nambu algebra and $\beta : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ be an algebra morphism. Then $(\mathcal{N}, \beta \circ [\cdot, ..., \cdot], \beta\alpha)$ is an n-ary Hom-Nambu algebra.*

Now, we define the tensor product of two n-ary Hom-algebras and prove some results involving n-ary Hom-algebras of Lie type and Hom-associative type.

Let A be a $\mathbb{K}$-vector space, μ be an n-linear map on A and η_i, $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, be linear maps on A. A triple $(A, \mu, \widetilde{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_{n-1}))$ is said to be a symmetric n-ary totally Hom-associative algebra over $\mathbb{K}$ if the following identities hold

$$\mu(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) = \mu(a_1, \cdots, a_n), \ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \tag{0.0.4}$$

$$\mu(\mu(a_1, ..., a_n), \eta_1(a_{n+1}), ..., \eta_{n-1}(a_{2n-1})) = \mu(\eta_1(a_1), \mu(a_2, ..., a_{n+1}), \eta_2(a_{n+2}), ..., \eta_{n-1}(a_{2n-1})) \tag{0.0.5}$$

$$= \cdots = \mu(\eta_1(a_1), ..., \eta_{n-1}(a_{n-1}), \mu(a_n, ..., a_{2n-1})),$$

where $a_1, ..., a_{2n-1} \in A$.

Theorem 0.3. *Let $(A, \mu, \widetilde{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_{n-1}))$ be a symmetric n-ary totally Hom-associative algebra and $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_{\mathcal{N}}, \widetilde{\alpha})$ be an n-ary Hom-Nambu algebras. Then the tensor product $A \otimes \mathcal{N}$ carries a structure of n-ary Hom-Nambu algebra over $\mathbb{K}$ with respect to the n-linear operation defined by*

$$[a_1 \otimes x_1, ..., a_n \otimes x_n] = \mu(a_1, ..., a_n) \otimes [x_1, ..., x_n]_{\mathcal{N}}, \quad \text{where } x_l \in \mathcal{N}, a_l \in A, l \in \{1, ..., n\}, \tag{0.0.6}$$

and linear maps $\widetilde{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ where $\zeta_i = \eta_i \otimes \alpha_i$, for $i \in \{1, ..., n-1\}$, defined by

$$\zeta_i(a \otimes x) = \eta_i(a) \otimes \alpha_i(x), \ \forall\ a \otimes x \in A \otimes \mathcal{N}. \tag{0.0.7}$$

In the following we generalize to n-ary Hom-Nambu algebras the notion of centroid and its properties discussed in [13].

Definition 0.4. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra and $End(\mathcal{N})$ be the endomorphism algebra of $\mathcal{N}$. Then the following subalgebra of $End(\mathcal{N})$*

$$Cent(\mathcal{N}) = \{\theta \in End(\mathcal{N}) : \theta[x_1, ..., x_n] = [\theta x_1, ..., x_n], \ \forall x_i \in \mathcal{N}\}. \tag{0.0.8}$$

is said to be the centroid of the n-ary Hom-Nambu algebra.

The definition is the same for classical case of n-ary Nambu algebra. We may also consider the same definition for any n-ary Hom-Nambu algebra.

Now, let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra. We denote by α^k, where $\alpha \in End(\mathcal{N})$, the k-times composition of α. We set in particular $\alpha^{-1} = 0$ and $\alpha^0 = Id$.

Definition 0.5. *An α^k-centroid of a multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ is a subalgebra of $End(\mathcal{N})$ denoted $Cent_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, given by*

$$Cent_{\alpha^k}(\mathcal{N}) = \{\theta \in End(\mathcal{N}) : \theta[x_1, ..., x_n] = [\theta x_1, \alpha^k(x_2) ..., \alpha^k(x_n)], \ \forall x_i \in \mathcal{N}. \tag{0.0.9}$$

Proposition 0.3. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot])$ be an n-ary Nambu-Lie algebra and $\theta \in Cent(\mathcal{N})$. Let us fix p and set for any $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$*

$$\{x_1, ..., x_n\}_p = [\theta x_1, ..., \theta x_{p-1}, \theta x_p, x_{p+1}, ..., x_n]. \tag{0.0.10}$$

Then $(\mathcal{N}, \{\cdot, ..., \cdot\}_p, \widetilde{\theta} = (\theta, ..., \theta))$ is an n-ary Hom-Nambu-Lie algebra.

In Section 1.5, we extend representation theory of Hom-Lie algebras introduced in [57] and [16] to the n-ary case and discuss the derivations, α^k-derivations and central derivations.

We denote by $End(\mathcal{N})$ the linear group of operators on the $\mathbb{K}$-vector space $\mathcal{N}$. Sometimes it is considered as a Lie algebra with the commutator brackets. We denote by α^k the k-times composition of α. In particular, we set $\alpha^{-1} = 0$ and $\alpha^0 = id$.

Definition 0.6. *For any $k \geq -1$, we call $D \in End(\mathcal{N})$ an α^k-*derivation *of the n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebra $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ if*

$$[D, \alpha] = 0 \quad (i.e. \quad D \circ \alpha = \alpha \circ D), \tag{0.0.11}$$

and for $x \in \mathcal{N}^n$

$$D[x_1, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n} [\alpha^k(x_1), ..., \alpha^k(x_{i-1}), D(x_i), \alpha^k(x_{i+1}), ..., \alpha^k(x_n)], \tag{0.0.12}$$

We denote by $Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ the set of α^k-derivations of the n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebra $\mathcal{N}$. Notice that we obtain trivial derivations for $k = -1$ and classical derivations for $k = 0$.

We set $\varsigma : Der_{\alpha^k}(\mathcal{N}) \to Der_{\alpha^{k+1}}(\mathcal{N})$ such that $\varsigma(D) = \alpha \circ D$. Since the elements of $Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ and α commute then ς is in the centroid of the Lie algebra $(Der(\mathcal{N}), [\cdot, \cdot])$. Then we have

Proposition 0.4. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra.*

The triple $(Der(\mathcal{N}), [\cdot, \cdot]_\varsigma, \varsigma)$, where the bracket is defined by $[\cdot, \cdot]_\varsigma = \varsigma \circ [\cdot, \cdot]$, is a Hom-Lie algebra.

Proposition 0.5. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra. If $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ and $\theta \in Cent_{\alpha^{k'}}(\mathcal{N})$, then $\theta D \in Der_{\alpha^{k+k'}}(\mathcal{N})$.*

We also introduce the notion of central derivation.

Définition 0.1. *Let $\varphi \in End(\mathcal{N})$, then φ is said to be a central deriavtion if $\varphi(\mathcal{N}) \subset Z(\mathcal{N})$ et $\varphi([\mathcal{N}, ..., \mathcal{N}]) = 0$.*

The set of central derivations of $\mathcal{N}$ is denoted by $C(\mathcal{N})$.

Notice that an α^k-derivation φ is a central derivation if $\varphi(\mathcal{N}) \subset Z(\mathcal{N})$.

Theorem 0.4. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra. Let $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ and $\theta \in Cent(\mathcal{N})$ then $[\theta, \alpha] = 0$. Hence*

1. *$[D, \theta]$ is in α^k-centroid of $\mathcal{N}$,*
2. *if $[D, \theta]$ is a central derivation then $D\theta$ is an α^k-derivation of $\mathcal{N}$.*

Theorem 1.17 gives a similar result on the tensor product of totally associative n-ary algebra and multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra.

Definition 0.7. *A representation of an n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebra $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ on $\mathcal{N}$ is a skew-symmetric multilinear map $\rho : \mathcal{N}^{n-1} \longrightarrow End(\mathcal{N})$, satisfying for $x, y \in \mathcal{N}^{n-1}$ the identity*

$$\rho(\alpha(x)) \circ \rho(y) - \rho(\alpha(y)) \circ \rho(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\alpha(x_1), ..., ad(y)(x_i), ..., \alpha(x_{n-1})) \circ \nu \qquad (0.0.13)$$

where ν is an endomorphism of $\mathcal{N}$.

Two representations ρ and ρ' on $\mathcal{N}$ are *equivalent* if there exists $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ an isomorphism of vector space such that $f(x \cdot y) = x \cdot' f(y)$ where $x \cdot y = \rho(x)(y)$ and $x \cdot' y = \rho'(x)(y)$ for $x \in \mathcal{N}^{n-1}$ and $y \in \mathcal{N}$.

We give in Proposition 1.18 a necessary and sufficient condition such that an adjoint representation leads to a coadjoint representation.

The last section of chapter 1 is dedicated to ternary q-Virasoro-Witt algebras. We recall constructions of infinite dimensional ternary Hom-Nambu algebras given in [6].

• **Chapter 2. Cohomology of n-ary multiplicative Hom-Nambu algebras** : In Section 2.1. We define a central extension $\tilde{\mathcal{N}}$ of $\mathcal{N}$ by adding a new generator e which is central and by modifying the bracket as follows : for all $\tilde{x}_i = x_i + a_i e$, $a_i \in \mathbb{K}$ and $1 \leq i \leq n$ we have

$$[\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n]_{\tilde{\mathcal{N}}} = [x_1, ..., x_n] + \varphi(x_1, ..., x_n)e, \qquad (0.0.14)$$

$$\beta(\widetilde{x}_i) = \alpha(x_i) + \lambda(x_i)e, \qquad (0.0.15)$$

$$[\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{n-1}, e]_{\widetilde{\mathcal{N}}} = 0, \qquad (0.0.16)$$

where $\lambda : \mathcal{N} \to \mathbb{K}$ is a linear map. We construct the cohomology complex relevant for central extensions of multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras. Since $\mathcal{N}$ does not act on $\varphi(x,z)$, it will be the cohomology of multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras for the trivial action.

Definition 0.8. *We define an arbitrary p-cochain as an element $\varphi \in \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \otimes ... \otimes \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \wedge \mathcal{N}^*$,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(\mathcal{N}) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(\mathcal{N}) \wedge \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, .., x_p, z) & \longmapsto & \varphi(x_1, .., x_p, z) \end{array}$$

We denote the set of p-cochains with values in $\mathbb{K}$ by $C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$.

Definition 0.9. *Let $\varphi \in C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ be a p-cochain on a multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra $\mathcal{N}$. A coboundary operator δ^p on arbitrary p-cochain is given by*

$$\begin{aligned} \delta^p\varphi(x_1, ..., x_{p+1}, z) &= \sum_{1 \le i < j}^{p+1} (-1)^i \varphi\big(\alpha(x_1), ..., \hat{x}_i, ..., [x_i, x_j]_\alpha, ..., \alpha(x_{p+1}), \alpha(z)\big) \qquad (0.0.17) \\ &+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \varphi\big(\alpha(x_1), ..., \hat{x}_i, ..., \alpha(x_{p+1}), L(x_i) \cdot z\big) \end{aligned}$$

where $x_1, ..., x_{p+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, $z \in \mathcal{N}$ and $\hat{x}_i$ means that x_i is omitted.

Proposition 0.6. *Let $\varphi \in C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ be a p-cochain, then*

$$\delta^{p+1} \circ \delta^p(\varphi) = 0$$

Then, we define The space of p-cocycles by

$$Z^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) : \delta^p\varphi = 0\},$$

and the space of p-coboundaries is defined by

$$B^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) = \{\psi = \delta^{p-1}\varphi : \varphi \in C^{p-1}(\mathcal{N}, \mathbb{K})\}.$$

We call p^{th}-cohomology group the quotient

$$H^p(\mathcal{N},\mathbb{K})=\frac{Z^p(\mathcal{N},\mathbb{K})}{B^p(\mathcal{N},\mathbb{K})}.$$

In the second Section we show that for an n-ary Hom-Nambu-Lie algebra $\mathcal{N}$, the space $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ carries a structure of Hom-Leibniz algebra. Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ be a n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras. On $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ which is the set of elements $x_1\wedge...\wedge x_{n-1}$ that are skewsymmetric in their arguments, for $x=x_1\wedge...\wedge x_{n-1}\in\wedge^{n-1}\mathcal{N},\ y=y_1\wedge...\wedge y_{n-1}\in\wedge^{n-1}\mathcal{N},\ z\in\mathcal{N}$, we define a linear map $L:\wedge^{n-1}\mathcal{N}\longrightarrow End(\mathcal{N})$ by $L(x)\cdot z=[x_1,...,x_{n-1},z]$, a linear map $\tilde{\alpha}:\wedge^{n-1}\mathcal{N}\longrightarrow\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ by $\tilde{\alpha}(x)=\alpha(x_1)\wedge...\wedge\alpha(x_{n-1})$, a bilinear map $[\ ,\ ]_\alpha:\wedge^{n-1}\mathcal{N}\times\wedge^{n-1}\mathcal{N}\longrightarrow\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ by

$$[x,y]_\alpha=L(x)\bullet_\alpha y=\sum_{i=0}^{n-1}\big(\alpha(y_1),...,L(x)\cdot y_i,...,\alpha(y_{n-1})\big).\tag{0.0.18}$$

We denote by $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ the space $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ and call it the fundamental set.

Proposition 0.7. *The triple $\big(\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ [\ ,\ ]_\alpha,\ \alpha\big)$ is a Hom-Leibniz algebra.*

We define a cohomology which is suitable for the study of one parameter formal deformations of n-ary Hom-Nambu-Lie algebras.

Definition 0.10. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\alpha}),\ \widetilde{\alpha}=(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ be an n-ary Hom-Nambu-Lie algebra. A formal deformation of the n-ary Hom-Nambu-Lie algebra $\mathcal{N}$ is given by a $\mathbb{K}[[t]]$-n-linear map*

$$[\cdot,...,\cdot]_t:\mathcal{N}[[t]]\times...\times\mathcal{N}[[t]]\to\mathcal{N}[[t]]$$

of the form $[\cdot,...,\cdot]_t=\sum_{i\geq0}t^i[\cdot,...,\cdot]_i$ where each $[\cdot,...,\cdot]_i$ is a $\mathbb{K}[[t]]$-n-linear map $[\cdot,...,\cdot]_i:\mathcal{N}\times...\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ (extended to a $\mathbb{K}[[t]]$-n-linear map), and $[\cdot,...,\cdot]_0=[\cdot,...,\cdot]$ such that for $(x_i)_{1\leq i\leq n-1},\ (y_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathcal{N}$

$$\big[\alpha_1(x_1),....,\alpha_{n-1}(x_{n-1}),[y_1,....,y_n]_t\big]_t=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\big[\alpha_1(y_1),....,\alpha_{i-1}(y_{i-1}),[x_1,....,x_{n-1},y_i]_t,\alpha_i(y_{i+1}),...,\alpha_{n-1}(y_n)\big]_t.\tag{0.0.19}$$

The above condition may be written for $x=(x_i)_{1\leq i\leq n-1},\ y=(y_i)_{1\leq i\leq n-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$ *and by setting* $z=y_n$

$$L_t([x,y]_\alpha)\cdot\alpha_n(z)=L_t(\tilde{\alpha}(x))\cdot\big(L_t(y)\cdot z\big)-L_t(\tilde{\alpha}(y))\cdot\big(L_t(x).z\big) \tag{0.0.20}$$

where $L_t(x)\cdot z=[x_1,...,x_{n-1},z]_t$ *and* $\tilde{\alpha}(x)=(\alpha_i(x_i))_{1\leq i\leq n-1}$.

Now let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ *be an* n*-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebra (*$\alpha_1=...=\alpha_n=\alpha$*).*

Eq. (2.3.2) *is equivalent, if the deformation is infinitesimal and by setting* $\psi=[\cdot,\cdots,\cdot]$, *to*

$$\begin{aligned}
&\big[\alpha(x_1),....,\alpha(x_{n-1}),\psi(y_1,....,y_n)\big]+\psi\big(\alpha(x_1),....,\alpha(x_{n-1}),[y_1,....,y_n]\big)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\big[\alpha(y_1),....,\alpha(y_{i-1}),\psi(x_1,....,x_{n-1},y_i),\alpha(y_{i+1}),...,\alpha(y_n)\big]\\
+&\sum_{i=1}^{n}\psi\big(\alpha(y_1),....,\alpha(y_{i-1}),[x_1,....,x_{n-1},y_i],\alpha(y_{i+1}),...,\alpha(y_n)\big).
\end{aligned}$$

This identity may be viewed as the 1*-cocycle condition* $\delta^1\psi=0$ *for the* $\mathcal{N}$*-valued cochain* ψ.

Definition 0.11. *A* p*-cochain is a* $(p+1)$*-linear map* $\varphi:\mathcal{L}(\mathcal{N})\otimes...\otimes\mathcal{L}(\mathcal{N})\wedge\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}$, *such that*

$$\alpha\circ\varphi(x_1,...,x_p,z)=\varphi(\alpha(x_1),...,\alpha(x_p),\alpha(z)).$$

We denote the set of p*-cochains by* $C^p(\mathcal{N},\mathcal{N})$

Definition 0.12. *We call, for* $p\geq 1$, p*-coboundary operator of the multiplicative* n*-ary Hom-Nambu-Lie algebra* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ *the linear map* $\delta^p:C^p(\mathcal{N},\mathcal{N})\to C^{p+1}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ *defined by*

$$\begin{aligned}
\delta^p\psi(x_1,...,x_p,x_{p+1},z) &= \sum_{1\leq i\leq j}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{\alpha(x_i)},...,\alpha(x_{j-1}),[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(z)\big)\\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{\alpha(x_i)},...,\alpha(x_{p+1}),L(x_i)\cdot z\big)\\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}L(\alpha^p(x_i))\cdot\psi\big(x_1,...,\widehat{x}_i,...,x_{p+1},z\big)\\
&+ (-1)^p\big(\psi(x_1,...,x_p,\ )\cdot x_{p+1}\big)\bullet_\alpha \alpha^p(z) \qquad (0.0.21)
\end{aligned}$$

where

$$\big(\psi(x_1,...,x_p,\ )\cdot x_{p+1}\big)\bullet_\alpha \alpha^p(z) = \sum_{i=1}^{n-1}[\alpha^p(x_{p+1}^1),...,\psi(x_1,...,x_p,x_{p+1}^i),...,\alpha^p(x_{p+1}^{n-1}),\alpha^p(z)], \qquad (0.0.22)$$

for $x_i=(x_i^j)_{1\leq j\leq n-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ 1\leq i\leq p+1,\ z\in\mathcal{N}.$

Proposition 0.8. *Let* $\psi\in C^p(\mathcal{N},\mathcal{N})$ *be a* p*-cochain then*

$$\delta^{p+1}\circ\delta^p(\psi)=0.$$

Then we define the space of p-cocycles by

$$Z^p(\mathcal{N},\mathcal{N})=\{\varphi\in C^p(\mathcal{N},\mathcal{N}):\delta^p\varphi=0\},$$

and the space of p-coboundaries by

$$B^p(\mathcal{N},\mathcal{N})=\{\psi=\delta^{p-1}\varphi:\varphi\in C^{p-1}(\mathcal{N},\mathcal{N})\}.$$

We call the p^{th}-cohomology group the quotient

$$H^p(\mathcal{N},\mathcal{N})=\frac{Z^p(\mathcal{N},\mathcal{N})}{B^p(\mathcal{N},\mathcal{N})}.$$

In Section 2.4, we extend to n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras the Takhtajan's construction of a cohomology of ternary Nambu-Lie algebras starting from Chevalley-Eilenberg cohomology of binary Lie algebras, (see [21, 58, 59]). The cohomology of multiplicative

Hom-Lie algebras was introduced in [2] and independently in [57]. The cohomology complex for Leibniz algebras was defined by Loday and Pirashvili in [46]. We extend it to Hom-Leibniz algebras as follows.

$$
\begin{aligned}
d^p\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1}) = &\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\big[\alpha^{p-1}(a_k),\varphi(a_1,\cdots,\widehat{a_k},\cdots,a_{p+1})\big] \\
&+(-1)^{p+1}\big[\varphi(a_1\otimes\cdots\otimes a_p),\alpha^{p-1}(a_{p+1})\big] \\
&+\sum_{1\le k<j}^{p+1}(-1)^k\varphi(\alpha(a_1)\otimes\cdots\otimes\widehat{a_k}\otimes\cdots\otimes\alpha(a_{j-1})\otimes[a_k,a_j]\otimes\alpha(a_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha(a_{p+1}))
\end{aligned}
\tag{0.0.23}
$$

Theorem 0.5. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ be a multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebra and $\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})=Hom(\otimes^p\mathcal{L}(\mathcal{N})\otimes\mathcal{N},\mathcal{N})$ for $p\geq 1$ be the set of cochains. Let $\Delta:\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})\to\mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ be the linear map defined for $p=0$ by*

$$\Delta\varphi(x_1\otimes\cdots\otimes x_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}x_1\otimes\cdots\otimes\varphi(x_i)\otimes\cdots\otimes x_{n-1} \tag{0.0.24}$$

and for $p>0$ by

$$(\Delta\varphi)(a_1,\cdots,a_{p+1})=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^{p-1}(x^1_{p+1})\otimes\cdots\otimes\varphi(a_1,\cdots,a_{n-1}\otimes x^i_{p+1})\otimes\cdots\otimes\alpha^{n-1}(x^{n-1}_{p+1}),$$

where we set $a_j=x^1_j\otimes\cdots\otimes x^{n-1}_j$.

Then there exists a cohomology complex $(\mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N}),\delta)$ for n-ary Hom-Nambu-Lie algebras such that

$$d\circ\Delta=\Delta\circ\delta.$$

The coboundary map $\delta:\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})\to\mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ is defined for $\varphi\in\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ by

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi(a_1,...,a_p,a_{p+1},x) &= \sum_{1\le i\le j}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(a_1),...,\widehat{\alpha(a_i)},...,\alpha(a_{j-1}),[a_i,a_j]_\alpha,...,\alpha(a_{p+1}),\alpha(x)\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(a_1),...,\widehat{\alpha(a_i)},...,\alpha(a_{p+1}),L(a_i).x\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}L(\alpha^p(a_i))\cdot\varphi\big(a_1,...,\widehat{a_i},...,a_{p+1},x\big) \\
&+ (-1)^p\big(\varphi(a_1,...,a_p,\ \ )\cdot a_{p+1}\big)\bullet_\alpha\alpha^p(x),
\end{aligned}
$$

where

$$\big(\varphi(a_1,...,a_p,\ )\cdot a_{p+1}\big)\bullet_\alpha \alpha^p(x)=\sum_{i=1}^{n-1}[\alpha^p(x^1_{p+1}),...,\varphi(a_1,...,a_p,x^i_{p+1}),...,\alpha^p(x^{n-1}_{p+1}),\alpha^p(x)].$$

for $a_i\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$, $x\in\mathcal{N}$.

• **Chapter** 3. **Quadratic** n**-ary Hom-Nambu algebras** : In the first section we introduce a class of Hom-Nambu-Lie algebras which possess an inner product.

Definition 0.13. *Let* $(\mathcal{N},[.,...,.],\widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha}=(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ *be an* n*-ary Hom-Nambu algebra and* $B:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathbb{K}$ *a nondegenerate symmetric bilinear form such that, for all* $y,\ z\in\mathcal{N}$ *and* $x\in\wedge^{n-1}\mathcal{N}$

$$B([x_1,\cdots,x_{n-1},y],z)+B(y,[x_1,\cdots,x_{n-1},z])=0, \tag{0.0.25}$$

$$B(\alpha_i(y),z)=B(y,\alpha_i(z)),\quad \forall i\in\{1,...,n-1\} \tag{0.0.26}$$

The quadruple $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\alpha},B)$ *is called quadratic* n*-ary Hom-Nambu algebra.*

Definition 0.14. *An* n*-ary Hom-Nambu algebra* $(\mathcal{N},[.,...,.],\widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha}=(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ *is called* Hom-quadratic *if there exists a pair* (B,β) *where* $B:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathbb{K}$ *is a nondegenerate symmetric bilinear form and a linear map* $\beta\in End(\mathcal{N})$ *satisfying*

$$B([x_1,\cdots,x_{n-1},y],\beta(z))+B(\beta(y),[x_1,\cdots,x_{n-1},z])=0, \tag{0.0.27}$$

We call the identity (0.0.27) *the* β*-invariance of* B*.*

In the second section, we establish a connection between quadratic n-ary Hom-Nambu algebras and representation theory.

Proposition 0.9. *Let* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\alpha})$ *be an* n*-ary Hom-Nambu algebra. If there exists* $B:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathbb{K}$ *a bilinear form such that the quadruple* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\alpha},B)$ *is a quadratic* n*-ary Hom-Nambu algebra then*

1. $(\mathcal{N}^*,\widetilde{L},\alpha^*_{n-1})$ *is a representation of* $\mathcal{N}$*,*
2. *the representations* $(\mathcal{N},L,\alpha_{n-1})$ *and* $(\mathcal{N}^*,L^*,\alpha^*_{n-1})$ *are isomorphic.*

In Section 3.3, we provide some constructions of Hom-quadratic Hom-Nambu-Lie algebras starting from an ordinary Nambu-Lie algebra and from tensor product of Hom-quadratic commutative Hom-associative algebra and Hom-quadratic Hom-Nambu-Lie algebra considered in Theorem 1.2.

Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],B)$ be a quadratic n-ary Nambu algebras. We denote by $Aut_S(\mathcal{N},B)$ the set of symmetric automorphisms of $\mathcal{N}$ with respect to B, that is automorphisms $f:\mathcal{N}\rightarrow\mathcal{N}$ such that $B(f(x),y)=B(x,f(y)),\forall x,y\in\mathcal{N}$.

Proposition 0.10. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],B)$ be a quadratic n-ary Nambu algebra and $\rho\in Aut_S(\mathcal{N},B)$.*

Then $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_\rho,\tilde{\rho},B,\rho)$ where

$$[\cdot,...,\cdot]_\rho=\rho\circ[\cdot,...,\cdot] \tag{0.0.28}$$

is a Hom-quadratic n-ary Hom-Nambu algebra, and $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_\rho,\tilde{\rho},B_\rho)$ where

$$B_\rho(x,y)=B(\rho(x),y) \tag{0.0.29}$$

is a quadratic n-ary Hom-Nambu algebra.

Proposition 0.11. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha,B)$ be a quadratic multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra. Then $(\mathcal{N},\alpha^{n-1}\circ[\cdot,...,\cdot],\alpha^n,B,\alpha^{n-1})$ is a Hom-quadratic n-ary Hom-Nambu algebra and $(\mathcal{N},\alpha^{n-1}\circ[\cdot,...,\cdot],\alpha^n,B_\alpha)$, where*

$$B_\alpha(x,y)=B(\alpha^{n-1}(x),y)=B(x,\alpha^{n-1}(y)), \tag{0.0.30}$$

is quadratic Hom-Nambu algebra.

In Section 3.5, we provide a construction of n-ary Hom-Nambu algebra $\mathcal{L}$ which is a generalization of the trivial T^*-extension introduced in [17, 53].

Theorem 0.6. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_\mathcal{N},B)$ be a quadratic n-ary Nambu-Lie algebra and $\mathcal{N}^*$ be the underlying dual vector space. The vector space $\mathcal{L}=\mathcal{N}\oplus\mathcal{N}^*$ equipped with the following bracket $[\cdot,...,\cdot]_\mathcal{L}:\mathcal{L}^n\rightarrow\mathcal{L}$ given, for $u_i=x_i+f_i\in\mathcal{L}$ where $i\in\{1,...,n\}$ by*

$$[u_1,...,u_n]_\mathcal{L}=[x_1,...,x_n]_\mathcal{N}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n+1}f_i\circ L(x_1,...,\widehat{x_i},...,x_n), \tag{0.0.31}$$

and a bilinear form

$$B_{\mathcal{L}}: \begin{array}{c} \mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L} \\ B_{\mathcal{L}}(x+f,y+g)=B(x,y)+f(y)+g(x) \end{array} \tag{0.0.32}$$

is a quadratic n-ary Nambu algebra.

Theorem 0.7. *Let $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_{\mathcal{N}},B)$ be a quadratic n-ary Nambu-Lie algebra where $\alpha\in Aut_S(\mathcal{N},B)$ is an involution. Then $(\mathcal{L},[\cdot,...,\cdot]_{\Omega},\widetilde{\Omega},B_{\mathcal{L}},\Omega)$, where $\Omega:\mathcal{L}\to\mathcal{L}\,;\,x+f\to\Omega(x+f)=\alpha(x)+f\circ\alpha$ and $[\cdot,...,\cdot]_{\Omega}=\Omega\circ[\cdot,...,\cdot]_{\mathcal{L}}$, is a Hom-quadratic multiplicative n-ary Hom-Nambu algebra.*

In Section 3.6, we give a construction of ternary algebra arising from quadratic Lie algebra. Let $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],B)$ be a real finite-dimensional quadratic Lie algebra and let $\mathfrak{g}^*$ be the dual of $\mathfrak{g}$. We denote by $\langle -,-\rangle$ the dual pairing between $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}^*$.
For all $x\in\mathfrak{g}$ and $f\in\mathfrak{g}^*$ we define an element $\phi(x\otimes f)\in\mathfrak{g}$ by

$$B(y,\phi(x\otimes f))=\langle[y,x],f\rangle=f([y,x])\text{ for all }y\in\mathfrak{g}. \tag{0.0.33}$$

Extending ϕ linearly, defines a $\mathfrak{g}$-equivariant map $\phi:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathfrak{g}$, which is surjective. To lighten the notation we will write $\phi(x,f)$ for $\phi(x\otimes f)$ in the sequel. The $\mathfrak{g}$-equivariance of ϕ is equivalent to

$$[\phi(x,f),\phi(y,g)]=\phi([\phi(x,f),y],g)+\phi(y,\phi(x,f)\cdot g), \tag{0.0.34}$$

for all $x,y\in\mathfrak{g}$ and $f,g\in\mathfrak{g}^*$, where $\phi(x,f)\cdot g$ is defined by

$$\langle y,\phi(x,f)\cdot g\rangle=\langle[y,\phi(x,f)],g\rangle,\ \text{for all }y\in\mathfrak{g}. \tag{0.0.35}$$

The fundamental identity (0.0.34) suggests defining a bracket on $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$ by

$$[x\otimes f,y\otimes g]=[\phi(x,f),y]\otimes g+y\otimes\phi(x,f)\cdot g. \tag{0.0.36}$$

Proposition 0.12. *[28]The bracket* (3.6.4) *turns $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$ into a Leibniz algebra.*

Proposition 0.13. *Let* $\alpha \in Aut_S(B, \mathfrak{g})$ *be an involution, then* $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*, [\cdot,\cdot]_\Omega, \Omega, B_\Omega)$*, where*

$$\Omega(x \otimes f) = \alpha(x) \otimes f \circ \alpha, \tag{0.0.37}$$

$$[x \otimes f, y \otimes g]_\Omega = \Omega \circ [x \otimes f, y \otimes g], \tag{0.0.38}$$

$$B_\Omega(x \otimes f, y \otimes g) = \langle \alpha(x), g\rangle\langle \alpha(y), f\rangle, \tag{0.0.39}$$

is a multiplicative quadratic Hom-Leibniz algebra.

The inner product on $\mathfrak{g}$ sets up an isomorphism $\flat : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ of $\mathfrak{g}$-modules, defined by $x^* = \flat(x) = B(x, \cdot)$. The map ϕ defined by equation (3.6.1) induces a map $T : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, by $T(x \otimes y) = \phi(x \otimes y^*)$. In other words, for all $x, y, z \in \mathfrak{g}$, we have

$$B(T(x \otimes y), z) = B([z, x], y),$$

whence

$$T(x \otimes y) = -T(y \otimes x).$$

This means that T factors through a map also denoted $T : \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.
Using T we can define a ternary bracket on $\mathfrak{g}$ by

$$[x, y, z] := [T(x \otimes y), z] \tag{0.0.40}$$

and $(\mathfrak{g}, [.,.,.], B)$ is a quadratic ternary Nambu algebra.

Proposition 0.14. *Let* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], B)$ *be a real finite-dimensional quadratic Lie algebra and* $\alpha \in Aut_S(B, \mathfrak{g})$ *be an involution. Then* $(\mathfrak{g}, \alpha \circ [\cdot,\cdot,\cdot], (\alpha, \alpha), B_\alpha)$*, where the bracket is defined in* (0.0.40) *and* $B_\alpha(x, y) = B(\alpha(x), y)$*, is a quadratic multiplicative ternary Hom-Nambu algebra.*

In Section 3.7, we construct quadratic n-ary Hom-Nambu algebras involving elements of the centroid of n-ary Nambu algebras. Let $\theta \in Cent(\mathcal{N})$ such that θ is invertible and symmetric with respect to B (i.e. $B(\theta x, y) = B(x, \theta y)$). We set

$$Cent_S(\mathcal{N}) = \{\theta \in Cent(\mathcal{N}) : \theta \text{ symmetric with respect to } B\}.$$

Theorem 0.8. *Let $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], B)$ be a quadratic n-ary Nambu-Lie algebra and $\theta \in Cent_S(\mathcal{N})$ such that θ is invertible. We consider a bilinear form B_θ defined by*

$$\begin{array}{rccc} B_\theta : & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \longmapsto & B(\theta x, y). \end{array}$$

Then, $(\mathcal{N}, \{\cdot, ..., \cdot\}_l, (\theta, ..., \theta), B_\theta)$ is a quadratic n-ary Hom-Nambu-Lie algebra.

This thesis is based on the following 3 papers :

1. Representations and Cohomology of n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras, *Journal of Geometry and Physics*, DOI 10.1016/j.geomphys.2011.04.022 (with F. Ammar, A. Makhlouf) (2011).
2. Quadratic n-ary Hom-Nambu algebras,
   arXiv :1110.2078, (with F. Ammar, A. Makhlouf) (2011)
3. Quadratic color Hom-Lie algebras,
   arXiv :1204.5155, (with F. Ammar, I. Ayadi, A. Makhlouf) (2012)

Introduction

Les algèbres n-aires et en particulier les algèbres ternaires sont apparues naturellement dans divers domaines de la physique théorique et mathématiques, et le traitement des données. Les principales motivations viennent de la découverte de la mécanique Nambu (1973) (voir [55]), ainsi que dans des travaux de S. Okubo (voir [56]) sur l'équation de Yang-Baxter.

Les opérations n-aires sont apparues d'abord à travers les matrices cubiques qui ont été introduites au XIXe siècle par Cayley et généralisées par Kapranov, Gelfand, Zelevinskii et Sokolov. Une autre motivation récente pour étudier les structures n-aires provient de la théorie des cordes et M-branes impliquant naturellement une algèbre, avec une opération ternaire, appelé algèbre Bagger-Lambert [14]. Pour d'autres applications physiques voir [38, 39, 40].

La première généralisation conceptuelle des algèbres binaires sont les algèbres ternaires introduites par Jacobson (voir [37]). Dans le cadre de problèmes de la théorie de Jordan et la mécanique quantique, il a défini les systèmes triples de Lie. Un système triple de Lie se compose d'un espace d'opérateurs linéaires sur l'espace vectoriel V qui est muni du crochet ternaire

$$[x, y, z]_T = [[x, y], z], \text{ où } [x, y] = xy - yx.$$

De manière équivalente, le système triple de Lie peut être considéré comme un sous-espace de l'algèbre de Lie fermée par rapport au produit ternaire. Les systèmes triples de Lie apparaissent dans l'étude des espaces symétriques.

Plus généralement, on distingue deux types de généralisations des algèbres de Lie binaires. Tout d'abord, les algèbres de Lie n-aires dans lesquelles l'identité de Jacobi est généralisée en considérant une sommation cyclique sur $\mathcal{S}_{2n-1}$ au lieu de $\mathcal{S}_3$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{2n-1}}\big[x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n-1)},[x_{\sigma(1)},....,x_{\sigma(2n-1)}]\big]=0 \tag{0.0.41}$$

et d'autre part les algèbres de Nambu n-aires dans lesquelles l'identité fondamentale généralise le fait que les applications adjointes sont des dérivations.

$$\begin{aligned}&\big[x_1,...,x_{n-1},[y_1,...,y_n]\big]\\&=\sum_{i=1}^{n}\big[y_1,...,y_{i-1},[x_1,....,x_{n-1},y_i],y_{i+1},...,y_n\big],\end{aligned} \tag{0.0.42}$$

La formulation algébrique de la mécanique de Nambu est du à Takhtajan [58, 60] alors que la définition abstraite des algèbres de Nambu n-aires ou algèbres de Nambu-Lie n-aires (lorsque le crochet est antisymétrique) a été donnée par Filippov en 1985 voir [29]. Les algèbres de Leibniz n-aires ont été introduites et étudiées dans [18]. D'autre part, les algèbres n-aires de type associatif ont été étudiés par Lister, Loos et Carlsson [19, 45, 47]. Les opérations n-aires de type associatif conduisent à deux classes principales d'algèbres n-aires "associatives", les algèbres n-aires totalement associatives et les algèbres n-aires partiellement associatives. En outre, elles admettent quelques variantes. Des exemples typiques d'algèbres n-aires totalement associatives pour $n = 3$ sont donnés par des sous-espaces d'une algèbre associative qui sont munies par le produit ternaire $(xyz) = xyz$. Ce produit naturel est ternaire lié à l'opération ternaire importante introduite par Hestenes définie sur l'espace des matrices rectangulaires $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ avec des entrées complexes par AB^*C où B^* est la matrice transposée conjuguée de B.

Les structures Hom-algèbres sont apparues d'abord dans le cadre des quasi-déformations et de discrétisations d'algèbres de Lie de champs de vecteurs. Ces quasi-déformations donnent des algèbres de quasi-Lie, une généralisation de la structure d'algèbre de Lie dans laquelle l'identité de Jacobi est déformée. Pour les notations et structure des algèbres Hom-Lie, algèbres Hom-associatives, superalgèbres Hom-Lie, des Hom-bigèbres voir [5, 48, 49, 51, 52]. Les généralisations des algèbres n-aires de type Lie et de type associatif par déformation des identités en utilisant des applications linéaires ont été introduites dans [12]. Ces généralisations sont des structures de Hom-algèbres n-aires qui généralisent les algèbres n-aire de type Lie tels que les algèbres Nambu n-aires, algèbres n-aires de Nambu-Lie et algèbres de Lie n-aires, et algèbres n-aires de type associatif tel que les algèbres n-aires totalement associatives et algèbres n-aires partiellement associatives. Voir aussi [63, 64, 65].

Dans le premier chapitre de la thèse, nous résumons dans la première section les définitions des algèbres Hom-Nambu n-aires (resp. Hom-Nambu- Lie) et algèbres Hom-Nambu n-aires multiplicatives (resp. Hom-Nambu-Lie multiplicatives) relatives à l'identité

$$\begin{aligned}&\big[\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]\big]\\&= \sum_{i=1}^{n} \big[\alpha_1(y_1), ..., \alpha_{i-1}(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], \alpha_i(y_{i+1}), ..., \alpha(y_n)\big],\end{aligned} \tag{0.0.43}$$

ainsi que les algèbres Hom-Lie n-aires. On donne, dans le deuxième section, quelques exemples d'algèbres Hom-Nambu de dimension finie. Dans la troisième section on rappelle la classification des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires de dimension 3 correspondant aux homomorphismes diagonaux donnée par Ataguema, Makhlouf et Silvestrov dans [12]. La quatrième section est consacrée aux différentes manière de construire des algèbres n-aires de type Hom-Nambu. On rappelle la construction par twist initiée par Yau et généralisée dans [12]. Ensuite on la généralise en une construction d'algèbre n-aire de Hom-Nambu à partir d'une algèbre n-aire de Hom-Nambu et d'un morphisme faible. On s'intéresse aussi à des constructions d'arité plus grande ou plus petite et par produit tensoriel. On montre par ailleurs comment obtenir de nouvelles algèbres n-aires de Hom-Nambu en utilisant les éléments du centroide.

La cinquième section est consacrée aux notions de dérivations et de représentations pour les algèbres n-aires. On étudie les α^k-dérivations, les dérivations centrales et dans le cas général, la théorie des représentations des algèbres Hom-Nambu n-aires. Nous discutons en particulier les cas des représentations adjointes et coadjointes. Les résultats obtenus dans cette section généralisent ceux donnés pour le cas binaire dans [16, 57].

Nous montrons aussi que pour une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative $\mathcal{N}$, l'espace $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ appelé espace fondamental, noté $\mathcal{L}(\mathcal{N})$, est muni d'une structure d'algèbre Hom-Leibniz. Dans le sixième section on donne des exemples d'algèbres ternaires Hom-

Nambu de dimension infinie. Ces exemples sont de type q-Virasoro-Witt.

Le deuxième chapitre est dédié à la cohomologie. Nous mettons en évidence une cohomologie adaptée aux extensions centrales d'algèbres n-aires Hom-Nambu-Lie multiplicatives et une cohomologie adaptée aux déformations formelles à un paramètre. La section 1 est consacrée aux extensions centrales qui nous conduisent à la cohomologie scalaire des algèbres n-aires Hom-Nambu.

Dans la dernière section, nous généralisons le procédé utilisé par Daletskii et Takhtajan [21] dans le cas classique pour montrer que la cohomologie des algèbres n-aires Hom-Nambu-Lie peut être décrite à partir du complexe de cohomologie des algèbres Hom-Leibniz.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons dans la section 1 la notion d'algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique, c'est à dire $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ est munie d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée B, α_i-symétrique $(B(\alpha_i(x), y) = B(x, \alpha_i(y)), \forall i \in \{1, ..., n-1\})$ et invariante (c'est à dire $B([x_1, \cdots, x_{n-1}, y], z) + B(y, [x_1, \cdots, x_{n-1}, z]) = 0$). La généralisation de cette notion a été introduite pour le cas binaire des algèbres Hom-Lie dans [16]. Une notion plus générale appelée algèbre n-aire Hom-Nambu Hom-quadratique est introduite par une déformation de l'invariance par une application linéaire β. La condition généralisée s'écrit $B([x_1, \cdots, x_{n-1}, y], \beta(z)) + B(\beta(y), [x_1, \cdots, x_{n-1}, z]) = 0$, elle est appelée β-invariance. La deuxième section est consacrée au lien entre les algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques et la théorie des représentations. Les résultats obtenus dans cette section généralisent ceux donnés pour le cas binaire dans [16]. Dans la section 3 nous montrons certaines constructions d'algèbres Hom-Nambu n-aires Hom-quadratiques en utilisant le principe de twist et le produit tensoriel. Nous généralisons aussi la théorie de la T^*-extension introduite dans [17] au cas des algèbres n-aires Nambu-Lie quadratiques. Par ailleurs nous donnons une construction d'une algèbre Hom-Nambu ternaire multiplicative quadratique à partir d'une algèbre de Lie quadratique par une procédure similaire à la construction de Faulkner. Nous montrons aussi quelques constructions utilisant les éléments du centroide.

En annexe, on rajoute un travail sur les structures quadratiques dans le cas des algèbres Hom-Lie color.

Chapitre 1

Algèbres de Nambu et de Hom-Nambu n-aires

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions des Hom-algèbres n-aires introduites dans [12] généralisant les algèbres n-aires de type Lie (algèbres de Nambu n-aires, de Nambu-Lie n-aires) et de type associatif et nous présentons les propriétés et des théorèmes de construction. Nous décrivons un procédé permettant d'obtenir une structure Hom-algèbre n-aire à partir d'une Hom-algèbre n-aire et un morphisme faible de Hom-algèbres n-aires ainsi que des constructions utilisant le centroide. On décrit aussi le produit tensoriel d'une algèbre Hom-Nambu n-aire et d'une algébre Hom-associative n-aire totale. Ensuite nous présentons dans le cas des algèbres Hom-Nambu n-aires une théorie des représentations généralisant le théorie introduite dans le cas binaire par Sheng dans [57].

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Une algèbre de **Nambu n-aire** est un couple $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot])$ constitué d'un espace vectoriel $\mathcal{N}$ et d'une application n-linéaire $[\cdot, ..., \cdot] : \mathcal{N}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{N}$ satisfaisant*

$$\begin{aligned}&\big[x_1, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]\big]\\ &= \sum_{i=1}^{n} \big[y_1, ..., y_{i-1}, [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], y_{i+1}, ..., y_n\big],\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{N}^n$.
L'identité (1.1.2) *est appelée* identité de Nambu.

Définition 1.2. *Une algèbre de **Hom-Nambu** **n-aire** est un triplet* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *constitué d'un espace vectoriel* $\mathcal{N}$, *d'une application n-linéaire* $[\cdot, ..., \cdot] : \mathcal{N}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{N}$ *et d'une famille d'applications linéaires* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ *satisfaisant*

$$\begin{aligned} &\big[\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]\big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big[\alpha_1(y_1), ..., \alpha_{i-1}(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], \alpha_i(y_{i+1}), ..., \alpha(y_n)\big], \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathcal{N}^n$.
L'identité (1.1.2) *est appelée* identité de Hom-Nambu.

Remarques 1.1.

1. *Lorsque les* α_i *sont toutes des applications identités, pour tous* $1 \leqslant i \leqslant n-1$, *on retrouve l'algèbre de Nambu n-aires classique. Si* $n = 2$ *correspond à l'identité Hom-jacobi.*
2. *Soit* $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$, $\widetilde{\alpha}(x) = (\alpha_1(x_1), \ldots, \alpha_{n-1}(x_{n-1})) \in \mathcal{N}^{n-1}$ *et* $y \in \mathcal{N}$. *On définit l'application adjointe* $ad(x)$ *comme une application linéaire sur* $\mathcal{N}$, *telle que*

$$ad(x)(y) = [x_1, \cdots, x_{n-1}, y]. \tag{1.1.3}$$

Alors l'identité Hom-Nambu (1.1.2) *peut être écrite à l'aide de l''application adjointe comme*

$$\begin{aligned} &ad(\widetilde{\alpha}(x))([x_n, ..., x_{2n-1}]) \\ &= \sum_{i=n}^{2n-1} [\alpha_1(x_n), ..., \alpha_{i-n}(x_{i-1}), ad(x)(x_i), \alpha_{i-n+1}(x_{i+1})..., \alpha_{n-1}(x_{2n-1})]. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Définition 1.3. *Une algèbre* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *où* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ *est dite algèbre **Hom-Nombu-Lie**, si*

$$[x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)}] = Sgn(\sigma)[x_1, .., x_n], \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad and \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}. \tag{1.1.5}$$

où $\mathcal{S}_n$ *est le groupe des permutations de* n.

Définition 1.4. *On appelle algèbre Hom-Lie n-aire le triplet* $(V, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *constitué d'un espace vectoriel* V*, une application n-linéaire* $[\cdot, ..., \cdot] : V \times ... \times V \to V$ *antisymétrique et une famille* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1...n-1}$ *d'applications linéaires* $\alpha_i : V \to V$ *satisfaisant l'identité Hom-Jacobi n-aire*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n-1}} Sng(\sigma)[x_{\sigma(x_1)}, ..., x_{\sigma(x_{n-1})}, [x_{\sigma(x_n)}, ..., x_{\sigma(x_{2n-1})}]] = 0 \tag{1.1.6}$$

Pour tout $x_1, ..., x_{2n-1} \in V$.

Définition 1.5. *Une algèbre Hom-Nambu n-aire* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *est dite* ***multiplicative*** *si* $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = \alpha$ *et*

$$\alpha([x_1, .., x_n]) = [\alpha(x_1), .., \alpha(x_n)], \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}. \tag{1.1.7}$$

On note l'algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative par $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$, où $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est une application linéaire, aussi l'élément $x \in \mathcal{N}^n$ réfère à $x = (x_1, ..., x_n)$ et $\alpha(x) = (\alpha(x_1), ..., \alpha(x_n))$.

Définitions 1.1. *Soient* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *et* $(\mathcal{N}', [\cdot, ..., \cdot]', \widetilde{\alpha'})$*, où* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ *et* $\widetilde{\alpha'} = (\alpha'_1, ..., \alpha'_{n-1})$*, deux algèbres Hom-Nambu. Une application linéaire* $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ *est dite*

- ***morphisme faible*** *d'algèbre Hom-Nambu, si elle satisfait*

$$f([x_1, ..., x_n]) = [f(x_1), ..., f(x_n)]' \ , \forall x_i \in \mathcal{N}.$$

- ***morphisme*** *d'algèbre Hom-Nambu, si* f *est un morphisme faible d'algèbre Hom-Nambu et* $f \circ \alpha_i = \alpha'_i \circ f$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
- ***automorphisme*** *(**faible**) d'algèbre Hom-Nambu si* f *est un morphisme (faible) d'algèbre Hom-Nambu et bijectif.*

1.2 Exemples

Exemple 1.1. *Considérons les algèbres ternaires* $(V, [\cdot,\cdot,\cdot], \alpha_1, \alpha_2)$ *de dimension* 2 *qui ont comme base* (e_1, e_2) *définies par*

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_1, e_1] = c_1 e_1 + c_2 e_2,\ [e_1, e_1, e_2] = c_3 e_1,\ [e_1, e_2, e_2] = c_4 e_2,\\
&\alpha_1(e_1) = 0,\ \alpha_1(e_2) = a_1 e_2,\\
&\alpha_2(e_1) = b_1 e_1,\ \alpha_2(e_2) = 0,
\end{aligned}$$

où $\{c_i\}_{i=1,\dots,4}, a_1, b_1$ *sont des paramètres tels que* $a_1 b_1 c_1 c_3 c_4 \neq 0$. *Ces algèbres ternaires sont des algèbres Hom-Nambu.*

Exemple 1.2. *Considérons les algèbres ternaires* $(V, [\cdot,\cdot,\cdot], \alpha_1, \alpha_2)$ *antisymétriques de dimension* 3 *qui ont comme base* (e_1, e_2, e_3) *définies par*

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2, e_3] = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3,\\
&\alpha_1(e_1) = 0,\ \alpha_1(e_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2,\ \alpha_1(e_3) = \frac{a_1 c_1}{c_2} e_1 + \frac{a_2 c_1}{c_2} e_+ a_3 e_3,\\
&\alpha_2(e_1) = 0,\ \alpha_2(e_2) = 0,\ \alpha_2(e_3) = b e_3
\end{aligned}$$

où $\{c_i, a_i\}_{i=1,2,3}, b$ *sont des paramètres tels que* $a_1 a_2 c_2 c_3 \neq 0$. *Ces algèbres ternaires sont des algèbres Hom-Nambu-Lie.*

1.3 Algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires de dimension 3

Dans ce qui suit, nous rappelons la classification des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires de dimension 3 correspondant aux homomorphismes diagonaux introduites dans [12]. Ces exemples sont intéressants dans le sens où ils montrent en particulier que les algèbres ternaires de dimension 3 antisymétriques peuvent être considérés non seulement comme des algèbres Nambu-Lie ternaires, mais aussi comme des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires avec les applications de déformations α_1 et α_2 différentes de l'application d'identité.

Théorème 1.1. *Toute algèbre Hom-Nambu-Lie de dimension* 3 *munie d'un homomorphisme diagonal est isomorphe à l'une des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires suivantes*

$(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_i,\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,...,5$, *qui sont définies relativement à la base* (e_1,e_2,e_3) *de* V *et l'antisymétrie par*

$$(1)\begin{cases}[e_1,e_2,e_3]_1=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3,\\ \alpha_1(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_1(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_1(e_3)=a_3e_3,\ ,\\ \beta_1(e_1)=b_1e_1,\ \beta_1(e_2)=\frac{a_2b_1}{a_1}e_2,\ \beta_1(e_3)=\frac{a_3b_1}{a_1}e_3,\\ \textit{où } \{a_i,b_i,c_i\}_{i=1,2,3} \textit{ sont des paramètres \ telle que } a_1\neq 0.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}[e_1,e_2,e_3]_2=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3,\\ \alpha_2(e_1)=0,\ \alpha_2(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_2(e_3)=a_3e_3,\ ,\\ \beta_2(e_1)=0,\ \beta_2(e_2)=b_2e_2,\ \beta_2(e_3)=\frac{a_3b_2}{a_2}e_3,\\ \textit{où } \{a_i,b_i\}_{i=,2,3}\,\{c_i\}_{i=1,2,3} \textit{ sont des paramètres \ telle que } a_2\neq 0.\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}[e_1,e_2,e_3]_3=c_2e_2+c_3e_3,\\ \alpha_3(e_1)=0,\ \alpha_3(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_3(e_3)=a_3e_3,\ ,\\ \beta_3(e_1)=0,\ \beta_3(e_2)=b_2e_2,\ \beta_1(e_3)=b_3e_3,\\ \textit{où } \{a_i,b_i,c_i\}_{i=,2,3} \textit{ sont des paramètres \ telle que } a_2\neq 0.\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}[e_1,e_2,e_3]_4=c_1e_1,\\ \alpha_4(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_4(e_2)=a_2e_2,\ \alpha_4(e_3)=a_3e_3,\ ,\\ \beta_4(e_1)=b_1e_1,\ \beta_4(e_2)=b_2e_2,\ \beta_4(e_3)=\frac{a_3b_2}{a_2}e_3,\\ \textit{où } \{a_i,b_i\}_{i=1,2,3},\ c_3 \textit{ sont des paramètres \ telle que } a_2\neq 0.\end{cases}$$

$$(5)\begin{cases}[e_1,e_2,e_3]_5=c_1e_1,\\ \alpha_5(e_1)=a_1e_1,\ \alpha_5(e_2)=0,\ \alpha_5(e_3)=0,\ ,\\ \beta_5(e_1)=b_1e_1,\ \beta_5(e_2)=b_2e_2,\ \beta_5(e_3)=b_3e_3,\\ \textit{où } \alpha_1,\ c_1,\{b_i\}_{i=1,2,3} \textit{ sont des paramètres .}\end{cases}$$

1.4 Constructions

1.4.1 Produit tensoriel

Dans la suite on rappelle la construction introduite dans [12] du produit tensoriel entre une algèbre Hom-Nambu et une algèbre totalement Hom-associative. Nous rappelons les définitions des algèbres totalement Hom-associatives n-aires et les algèbres partiellement Hom-associatives n-aires.

Définitions 1.2. *1. Une algèbre **totalement Hom-associative** n**-aire** $(\mathcal{A}, \mu, \widetilde{\eta})$ est constituée d'un espace vectoriel $\mathcal{A}$, d'une application n-linéaire $\mu : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ et d'une famille d'applications linéaires $\widetilde{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ où $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} &\mu(\mu(x_1, ..., x_n), \eta_1(x_{n+1}), ..., \eta_{n-1}(x_{2n-1})) \\ &= \mu(\eta_1(x_1), \mu(x_2, ..., x_{n+1}), \eta_2(x_{n+2}), ..., \eta_{n-1}(x_{2n-1})) \\ &= \cdots = \mu(\eta_1(x_1), ..., \eta_{n-1}(x_{n-1}), \mu(x_n, ..., x_{2n-1})), \ \forall x_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

*2. Une algèbre **partiellement Hom-associative** n**-aire** $(\mathcal{A}, \mu, \widetilde{\eta})$ est constituée d'un espace vectoriel $\mathcal{A}$, d'une application n-linéaire $\mu : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ et d'une famille d'applications linéaires $\widetilde{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ où $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} &\mu(\mu(x_1, ..., x_n), \eta_1(x_{n+1}), ..., \eta_{n-1}(x_{2n-1})) \\ &+ \mu(\eta_1(x_1), \mu(x_2, ..., x_{n+1}), \eta_2(x_{n+2}), ..., \eta_{n-1}(x_{2n-1})) \\ &+ \cdots + \mu(\eta_1(x_1), ..., \eta_{n-1}(x_{n-1}), \mu(x_n, ..., x_{2n-1})) = 0, \ \forall x_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Exemple 1.3. *Soit l'algèbre Hom-associative ternaire $(V, \mu, (\alpha, \alpha))$ de dimension 2 de base (e_1, e_2) qui est définie par*

$$\begin{aligned} m(e_1, e_1, e_1) &= e_1 & m(e_2, e_2, e_1) &= 2e_1 - e_2 \\ m(e_1, e_1, e_2) &= e_1 - e_2 & m(e_2, e_2, e_2) &= 3e_1 - 2e_2 \\ m(e_1, e_2, e_2) &= 2e_1 - e_2 & m(e_1, e_2, e_1) &= e_1 - e_2 \\ m(e_2, e_1, e_1) &= e_1 - e_2 & m(e_2, e_1, e_2) &= 2e_1 - e_2 \end{aligned}$$

et l'application linéaire

$$\alpha(e_1) = e_1$$
$$\alpha(e_2) = e_1 - e_2$$

Théorème 1.2. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire et* $(\mathcal{A}, \mu, \widetilde{\eta})$ *une algèbre totalement Hom-associative n-aire, alors le produit tensoriel* $A \otimes \mathcal{N}$ *est muni d'une structure d'algèbre Hom-Nambu n-aire sur* $\mathbb{K}$ *munie de l'opération n-linéaire définie par*

$$[a_1 \otimes x_1, ..., a_n \otimes x_n] = \mu(a_1, ..., a_n) \otimes [x_1, ..., x_n]_{\mathcal{N}}, \forall\ x_l \in \mathcal{N}, a_l \in A, l \in \{1, ..., n\}, \quad (1.4.3)$$

et les applications linéaires $\widetilde{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ *où* $\zeta_i = \eta_i \otimes \alpha_i$*, pour* $i \in \{1, ..., n-1\}$*, données par*

$$\zeta_i(a \otimes x) = \eta_i(a) \otimes \alpha_i(x),\ \forall\ a \otimes x \in A \otimes \mathcal{N}. \quad (1.4.4)$$

Démonstration. Pour $a_k \otimes x_k,\ b_l \otimes y_l \in A \otimes \mathcal{N}$, $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq l \leq n$, on a

$$[\zeta_1(a_1 \otimes x_1), ..., \zeta_{n-1}(a_{n-1} \otimes x_{n-1}), [b_1 \otimes y_1, ..., b_n \otimes y_n]]$$
$$= \mu(\eta_1(a_1), ..., \eta_{n-1}(a_{n-1}), \mu(b_1, ..., b_n)) \otimes [\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}.$$

La symétrie et la total associativité de A donne

$$[\zeta_1(b_1 \otimes y_1), ..., [a_1 \otimes x_1, ..., a_{n-1} \otimes x_{n-1}, b_l \otimes y_l], ..., \zeta_{n-1}(b_n \otimes y_n)]$$
$$= \mu(\eta_1(b_1), ..., \mu(a_1, ..., a_{n-1}, b_l), ..., \eta_{n-1}(b_{n-1})) \otimes [[\alpha_1(y_1), ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]_{\mathcal{N}}, ..., \alpha_{n-1}(y_n)]_{\mathcal{N}}$$
$$= \mu(\eta_1(a_1), ..., \eta_{n-1}(a_{n-1}), \mu(b_1, ..., b_n)) \otimes [\alpha_1(y_1), ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]_{\mathcal{N}}, ..., \alpha_{n-1}(y_n)]_{\mathcal{N}}.$$

Donc

$$\sum_{l=1}^{n} [\zeta_1(b_1 \otimes y_1), ..., [a_1 \otimes x_1, ..., a_{n-1} \otimes x_{n-1}, b_l \otimes y_l], ..., \zeta_{n-1}(b_n \otimes y_n)]$$
$$= \mu(\eta_1(a_1), ..., \eta_{n-1}(a_{n-1}), \mu(b_1, ..., b_n)) \otimes \Big(\sum_{l=1}^{n} [\alpha_1(y_1), ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]_{\mathcal{N}}, ..., \alpha_{n-1}(y_n)]_{\mathcal{N}} \Big)$$
$$= \mu(\eta_1(a_1), ..., \eta_{n-1}(a_{n-1}), \mu(b_1, ..., b_n)) \otimes [\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}.$$

□

Corollaire 1.3. *Soit* (A,μ,η) *une algèbre totalement Hom-associative n-aire multiplicative symétrique (i.e.* $\eta\circ\mu = \mu\circ\eta^{\otimes n}$*) et* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_{\mathcal{N}},\widetilde{\alpha})$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative. Alors* $A\otimes\mathcal{N}$ *est une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative.*

Théorème 1.4. *Soit* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\alpha})$ *une algèbre Hom-Nambu et* $\gamma:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ *est un morphisme faible d'algèbre Hom-Nambu* $\mathcal{N}$*, alors* $(\mathcal{N},\gamma\circ[\cdot,...,\cdot],\gamma\circ\widetilde{\alpha})$ *où* $\gamma\circ\widetilde{\alpha} = (\gamma\circ\alpha_1,...,\gamma\circ\alpha_{n-1})$ *est une algèbre Hom-Nambu.*

Corollaire 1.5. *Si* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative, alors* $(\mathcal{N},\alpha^n\circ[\cdot,...,\cdot],\alpha^{n-1})$ *est une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative.*

Corollaire 1.6. *Si* $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot])$ *est une algèbre de Nambu n-aire et* $\alpha:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ *et une morphisme d'algèbre de Nambu, alors* $(\mathcal{N},\alpha\circ[\cdot,...,\cdot],\alpha)$ *est une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative.*

Exemple 1.4. *Une algèbre* V *est constituée des fonctions différentiable de trois variables équipée par le crochet défini par le Jacobien fonctionnel* $J(f) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_i})_{i=1,2,3}$

$$[f_1,f_2,f_3] = det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

est une algèbre Nambu-Lie ternaire. En considérant une endomorphisme d'algèbre Nambu-Lie ternaire, on construit une algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire.

Soit γ *un polynôme de trois variables tel que det* $J(\gamma) = 1$*. Soit* $\alpha_\gamma : V\to V$ *la transformation de composition définie par* $\alpha_\gamma(f) = f\circ\gamma$*, pour tous* $f\in V$*. Alors*

$$J(\alpha_\gamma(f)) = J(f\circ\gamma) = (J(f)\circ\gamma)J(\gamma) = \alpha_\gamma(J(f))J(\gamma),$$

$$detJ(\alpha_\gamma(f)) = det(J(f)\circ\gamma)detJ(\gamma) = det\alpha_\gamma(J(f))detJ(\gamma).$$

Donc, pour toute transformation γ *telle que* $detJ(\gamma) = 1$*, la transformation de composition* α_γ *définit une endomorphisme d'algèbre Nambu-Lie ternaire munie du produit* (1.4.5)*. D'où le triplet*

$$(V,[\cdot,\cdot,\cdot]_{\alpha_\gamma} = \alpha_\gamma\circ[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha_\gamma)$$

est une algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire.

1.4.2 Hom-Nambu algebras of higher arities

Théorème 1.7. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative, on définit le crochet* $(2n-1)$*-aire*

$$[x_1, ..., x_{2n-1}]^1 = [[x_1, ..., x_n], \alpha(x_{n+1}), ..., \alpha(x_{2n-1})], \tag{1.4.6}$$

pour tous $x_1, ..., x_{2n-1} \in \mathcal{N}$*. Alors* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]^1, \alpha)$ *est une algèbre Hom-Nambu* $(2n-1)$*-aire multiplicative.*

Corollaire 1.8. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative. Pour* $k > 0$ *on définit le crochet* $((2^k(n-1)+1))$*-aire*

$$[x_1, ..., x_{2n-1}]^k = [[x_1, ..., x_{2^{k-1}(n-1)+1}]^{k-1}, \alpha(x_{2^{k-1}(n-1)+2}), ..., \alpha(x_{2^k(n-1)+1})]^{k-1}, \tag{1.4.7}$$

pour tous $x_1, ..., x_{2^k(n-1)+1} \in \mathcal{N}$*. Alors* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]^k, \alpha)$ *est une algèbre Hom-Nambu* $((2^k(n-1)+1))$*-aire multiplicative.*

1.4.3 Hom-Nambu algebras of lower arities

Théorème 1.9. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}))$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire où* $n \geq 3$*. On suppose* $v \in \mathcal{N}$ *qui satisfait*

$$\alpha_1(v) = v \text{ et } [v, x_1, ..., n_{n-2}, v] = 0 \ \forall x_1, ..., x_{n-2} \in \mathcal{N}.$$

On définit le crochet $(n-1)$*-aire*

$$[x_1, ..., x_{n-1}]_1 = [v, x_1, ..., x_{n-1}] \tag{1.4.8}$$

pour tous $x_1, ..., x_{n-1} \in \mathcal{N}$*. Alors* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_1, \widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_2, ..., \alpha_{n-1}))$ *est une algèbre Hom-Nambu* $(n-1)$*-aire.*

Remarque 1.1. *Si* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire (multiplicative), alors* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_1, \widetilde{\alpha}_1)$ *est une algèbre Hom-Nambu-Lie* $(n-1)$*-aire (multiplicative).*

Corollaire 1.10. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}))$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire où* $n \geq 3$*. On suppose pour* $k = 1, ..., n-1$ *qu'il existe* $v_i \in \mathcal{N}$*, pour* $1 \leq i \leq k$*, qui satisfait*

$$\alpha_i(v_i) = v_i, \ \forall i \in \{1, ..k\},$$

et

$$[v_1, ..., v_k, x_1, ..., n_{n-k-1}, v_i] = 0, \ \forall x_1, ..., x_{n-k-1} \in \mathcal{N} \text{ et } i \in \{1, ..k\}.$$

On définit le crochet $(n-k)$-aire

$$[x_1, ..., x_{n-k}]_k = [v_1, .., v_k, x_1, ..., x_{n-k}] \tag{1.4.9}$$

pour tous $x_1, ..., x_{n-k} \in \mathcal{N}$. Alors $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_k, \widetilde{\alpha}_k = (\alpha_{k+1}, ..., \alpha_{n-1}))$ est une algèbre Hom-Nambu $(n-k)$-aire.

1.4.4 Centroide d'algèbres Hom-Nambu

Définition 1.6. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative et $End(\mathcal{N})$ l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{N}$. Alors la sous-algèbre de $End(\mathcal{N})$ suivante*

$$Cent(\mathcal{N}) = \{\theta \in End(\mathcal{N}) : \theta[x_1, ..., x_n] = [\theta x_1, ..., x_n], \ \forall x_i \in \mathcal{N}\}. \tag{1.4.10}$$

*est appelée le **centroide** de l'algèbre Hom-Nambu n-aire.*

Définition 1.7. *On appelle α^k-**centroide** noté, $Cent_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, l'espace des endomorphismes qui vérifient*

$$\theta[x_1, ..., x_n] = [\theta x_1, \alpha^k(x_2), ..., \alpha^k(x_n)],$$

pour tout $x_i \in \mathcal{N}$.

Remarque 1.2. *Il est simple de voir que $Cent_{\alpha^0}(\mathcal{N}) = Cent(\mathcal{N})$. Si $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ est une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative et $\theta \in Cent(\mathcal{N})$ alors*

$$\theta[x_1, ..., x_n] = [\theta x_1, \alpha^k(x_2), ..., \alpha^k(x_n)] = [\alpha^k(x_1), ...\theta x_i, ..., \alpha^k(x_n)].$$

pour tout $x_i \in \mathcal{N}$ et $i \in \{1, ..., n\}$.

Lemme 1.11. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot])$ une algèbre Nambu-Lie n-aire. Si $\theta \in Cent(\mathcal{N})$, alors pour $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$*

1. $[\theta^{p_1} x_1, ..., \theta^{p_n} x_n] = \theta^{p_1 + ... + p_n}[x_1, ..., x_n], \ \forall p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}$,
2. $[\theta^{p_1} x_1, ..., \theta^{p_n} x_n] = Sgn(\sigma)[\theta^{p_1} x_{\sigma(1)}, ..., \theta^{p_n} x_{\sigma(n)}], \ \forall p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}$ *and* $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$.

Démonstration. Soit $\theta \in Cent(\mathcal{N})$, $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$ et $1 \leq p \leq n$, on a

$$[\theta^p x_1, ..., x_n] = \theta[\theta^{p-1} x_1, ..., x_n] = ... = \theta^p [x_1, ..., x_n].$$

Aussi, observant que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$

$$[x_1, ..., \theta^p x_k, ..., x_n] = -[\theta^p x_k, x_2, ..., x_1, ..., x_n] = -\theta^p [x_k, x_2, ..., x_1, ..., x_n] = \theta^p [x_1, ..., x_k, ..., x_n].$$

Alors, de la même façon on a

$$[\theta^{p_1} x_1, ..., \theta^{p_n} x_n] = \theta^{p_n} [\theta^{p_1} x_1, ..., \theta^{p_{n-1}} x_{n-1}, x_n] = ... = \theta^{p_1 + ... + p_n} [x_1, ..., x_n].$$

La deuxième assertion est une conséquence du calcul précédent et l'antisymétrie de $[\cdot, ..., \cdot]$.

□

Proposition 1.12. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot])$ une algèbre Nambu-Lie n-aire et $\theta \in Cent(\mathcal{N})$. Soit un entier fixé p et prenant pour tout $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$*

$$\{x_1, ..., x_n\}_p = [\theta x_1, ..., \theta x_{p-1}, \theta x_p, x_{p+1}, ..., x_n]. \tag{1.4.11}$$

Alors $(\mathcal{N}, \{\cdot, ..., \cdot\}_p, \widetilde{\theta} = (\theta, ..., \theta))$ est une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire.

Démonstration. Pour $\theta \in Cent(\mathcal{N})$ et $p \in \{1, ..., n\}$, on a

$$\begin{aligned}\{\theta x_1, ..., \theta x_{n-1}, \{y_1, ..., y_n\}_p\}_p &= [\theta^2 x_1, ..., \theta^2 x_p, ..., \theta x_{n-1}, [\theta y_1, ..., \theta y_p, ..., y_n]] \\ &= [\theta^2 x_1, ..., \theta^2 x_p, ..., \theta x_{n-1}, \theta^p [y_1, ..., y_n]] \\ &= \theta^{2p+n-1}([x_1, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]]).\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\sum_{k=0}^{n}\{\theta y_1, ..., \{x_1, ..., x_{n-1}, y_k\}_p, ..., \theta y_n\}_p$$
$$= \sum_{k=0}^{p}\{\theta y_1, ..., \{x_1, ..., x_{n-1}, y_k\}_p, ..., \theta y_n\}_p + \sum_{k=p}^{n}\{\theta y_1, ..., \{x_1, ..., x_{n-1}, y_k\}_p, ..., \theta y_n\}_p$$
$$= \sum_{k=0}^{p}[\theta^2 y_1, ..., \theta[\theta x_1, ..., \theta x_p, ..., x_{n-1}, y_k], ..., \theta^2 y_p, ..., \theta y_n]$$
$$+ \sum_{k=0}^{p}[\theta^2 y_1, ..., \theta^2 y_p, ..., [\theta x_1, ..., \theta x_p, ..., x_{n-1}, y_k], ..., \theta y_n]$$
$$= \sum_{k=0}^{p}\theta^{2p+n-1}[y_1, ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_k], ..., y_n] + \sum_{k=0}^{p}\theta^{2p+n-1}[2y_1, ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_k], ..., y_n]$$
$$= \theta^{2p+n-1}(\sum_{k=0}^{n}[y_1, ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_k], ..., y_n]).$$

Donc l'identité Hom-Nambu pour le crochet $[\cdot, ..., \cdot]$ implique l'identité Hom-Nambu pour $\{\cdot, ..., \cdot\}_l$. L'antisymétrie est prouvée par la deuxième assertion du lemme 1.11. $\square$

1.5 Représentations des algèbres Hom-Nambu n-aires

1.5.1 Dérivations des algèbres Hom-Nambu n-aires multiplicatives

Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu n-aire et $End(\mathcal{N})$ l'espace des endomorphismes de l'espace $\mathcal{N}$. On note α^k la composition de α et $\alpha^0 = Id$.

Définition 1.8. *Pour tout $k \geq 0$, on appelle $D \in End(\mathcal{N})$ une α^k-dérivation d'algèbre Hom-Nambu n-aire multiplicative $\mathcal{N}$ si*

$$D[x_1, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n}[\alpha^k(x_1), ..., \alpha^k(x_{i-1}), D(x_i), \alpha^k(x_{i+1}), ..., \alpha^k(x_n)], \tag{1.5.1}$$

on note $Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ l'espace des α^k-dérivations

Remarques 1.2.

(i) *Notons qu'on obtient la dérivation classique lorsque $k = 0$.*

(ii) *Pour* $x = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathcal{N}^{n-1}$ *telle que* $\alpha(x) = x$ *et* $k \geq 1$, *on définit l'application* $ad_k(x) \in End(\mathcal{N})$ *par*

$$ad_k(x)(y) = [x_1, ..., x_{n-1}, \alpha^k(y)], \quad \forall y \in \mathcal{N}. \tag{1.5.2}$$

L'application $ad_k(x)$ *est un* α^{k+1}*-derivation, qu'on appelle* α^{k+1}***-derivation intérieure****.* *On note par* $Inn_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ *l'espace engendré par toutes les* α^{k+1}*-derivations intérieures.*

(iii) *On pose* $Der(\mathcal{N}) = \bigoplus_{k \geq -1} Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ *et* $Inn(\mathcal{N}) = \bigoplus_{k \geq -1} Inn_{\alpha^k}(\mathcal{N})$.

Lemme 1.13. *Pour* $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ *et* $D' \in Der_{\alpha^{k'}}(\mathcal{N})$, *où* $k + k' \geq -1$, *on a* $[D, D'] \in Der_{\alpha^{k+k'}}(\mathcal{N})$, *où* $[D, D']$ *est le commutateur usuel.*

Maintenant, on définit l'application linéaire $\varsigma : Der_{\alpha^k}(\mathcal{N}) \to Der_{\alpha^{k+1}}(\mathcal{N})$ par $\varsigma(D) = \alpha \circ D$. Puisque les éléments de $Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ et α commutent alors ς est dans le centroide d'algèbre de Lie $(Der(\mathcal{N}), [\cdot, \cdot])$.
Donc, d'après la proposition 1.12, on obtient

Proposition 1.14. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative. Le triplet* $(Der(\mathcal{N}), [\cdot, \cdot]_\varsigma, \varsigma)$, *où le crochet est défini par* $[\cdot, \cdot]_\varsigma = \varsigma \circ [\cdot, \cdot]$, *est une algèbre Hom-Lie.*

Proposition 1.15. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative. Si* $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ *et* $\theta \in Cent_{\alpha^{k'}}(\mathcal{N})$, *alors* $\theta D \in Der_{\alpha^{k+k'}}(\mathcal{N})$.

Démonstration. Soit $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$ alors

$$\begin{aligned}\theta D([x_1, ..., x_n]) &= \sum_{i=1}^{n} \theta[\alpha^k(x_1), ..., D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\alpha^{k+k'}(x_1), ..., \theta D(x_i), ..., \alpha^{k+k'}(x_n)].\end{aligned}$$

Donc θD est une α^k-derivation. □

Maintenant on définit la notion de derivation centrale. Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative. On pose $Z(\mathcal{N}) = \{x \in \mathcal{N} : [x, y_1, ..., y_{n-1}] = 0, \ \forall \ y_1, ..., y_{n-1} \in \mathcal{N}\}$, le centre de l'algèbre Hom-Nambu-Lie $n$aire.

Définition 1.9. *Soit $\varphi \in End(\mathcal{N})$, alors φ est dite* ***derivation centrale*** *si $\varphi(\mathcal{N}) \subset Z(\mathcal{N})$ et $\varphi([\mathcal{N}, ..., \mathcal{N}]) = 0$.*

L'ensemble des derivations centrales de $\mathcal{N}$ est noté par $C(\mathcal{N})$.

Notons qu'une α^k-derivation φ est une derivation centrale si $\varphi(\mathcal{N}) \subset Z(\mathcal{N})$.

Théorème 1.16. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative. Soit D in $Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$ et θ dans $Cent(\mathcal{N})$ telle que $[\theta, \alpha] = 0$, alors on a*

1. *$[D, \theta]$ est dans α^k-centroide de $\mathcal{N}$,*
2. *if $[D, \theta]$ est une derivation centrale alors $D\theta$ est une α^k-derivation de $\mathcal{N}$.*

Démonstration. (1) Soit $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, $\theta \in Cent(\mathcal{N})$ et $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$ on a

$$\begin{aligned}
D\theta([x_1, ..., x_n]) &= D([\theta x_1, ..., x_n]) \\
&= [D\theta x_1, ..., \alpha^k(x_n)] + \sum_{i=2}^{n} [\alpha^k(\theta x_1), ..., D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)] \\
&= [D\theta x_1, ..., \alpha^k(x_n)] + \sum_{i=2}^{n} [\theta\alpha^k(x_1), ..., D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)] \\
&= [D\theta x_1, ..., \alpha^k(x_n)] + \sum_{i=2}^{n} [\alpha^k(x_1), ..., \theta D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)] \\
&= [D\theta x_1, ..., \alpha^k(x_n)] + \theta D([x_1, ..., x_n]) - [\theta D x_1, ..., \alpha^k(x_n)].
\end{aligned}$$

Alors

$$(D\theta - \theta D)([x_1, ..., x_n]) = [(D\theta - \theta D)x_1, \alpha^k(x_2), ..., \alpha^k(x_n)].$$

c'est-à-dire, $[D, \theta] = D\theta - \theta D \in Cent_k(\mathcal{N})$.

(2) D'après la proposition 1.15, θD est une α^k-derivation et puisque $[D, \theta]$ est une α^k-derivation, alors $D\theta = [D, \theta] + \theta D$ est aussi une α^k-derivation. □

Soit A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, μ une application n-linéaire sur A et η une application linéaire sur A. Soit (A, μ, η) une algèbre totalement Hom-associative n-aire symétrique. Le η^k-centroide $Cent_{\eta^k}(A)$ de A est défini par

$$Cent_{\eta^k}(A) = \{f \in End(A) : \ f(\mu(a_1, ..., a_n)) = \mu(f(a_1), \eta^k(a_2), ..., \eta^k(a_n))\},$$

pour tout $a_i \in A$ and $i \in \{1, ..., n\}$. L'ensemble du η^k-derivation, $Der_{\eta^k}(A)$, est un sous espace de $End(A)$ défini par $\varphi \in End(A)$ telle que

$$\varphi(\mu(a_1, ..., a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\eta^k(a_1)...., \eta^k(a_{i-1}), \varphi(a_i), \eta^k(a_{i+1}), ..., \eta^k(a_n))\},$$

pour tout $a_i \in A$.

Théorème 1.17. *Soit (A, μ, η) une algèbre totalement Hom-associative n-aire symétrique et $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative, Alors on a les assertions suivantes*

- *Si $f \in Cent_{\eta^k}(A)$ et $\theta \in Cent_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, alors $f \otimes \theta$ est dans le ζ^k-centroide, où $\zeta^k = \eta^k \otimes \alpha^k$, de l'algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire $A \otimes \mathcal{N}$ défini dans 1.2.*
- *Soit $f \in Cent_{\eta^k}(A)$ et $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, alors $f \otimes D$ est une ζ^k-derivation de l'algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire $A \otimes \mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $a_i \in A$, $x_i \in \mathcal{N}$ où $i \in \{1, ..., n\}$ et f un η^k-centroide sur A.
• Si $\theta \in Cent_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, alors

$$\begin{aligned}
(f \otimes \theta)([a_1 \otimes x_1, ..., a_n \otimes x_n]) &= (f \otimes \theta)(\mu(a_1, ..., a_n) \otimes [x_1, ..., x_n]_{\mathcal{N}}) \\
&= \mu(f(a_1), \eta^k(a_2), ..., \eta^k(a_n)) \otimes [\theta(x_1), \alpha^k(x_2), ..., \alpha^k(x_n)]_{\mathcal{N}} \\
&= [(f \otimes \theta)(a_1 \otimes x_1), \zeta^k(a_2 \otimes x_2), ..., \zeta^k(a_n \otimes x_n)].
\end{aligned}$$

Donc $f \otimes \theta$ est dans le ζ^k-centroide de $A \otimes \mathcal{N}$.
• Si $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{N})$, alors

$$\begin{aligned}
(f \otimes D)([a_1 \otimes x_1, ..., a_n \otimes x_n]) &= f \otimes D((a_1 \cdot ... \cdot a_n) \otimes [x_1, ..., x_n]) \\
&= \mu(f(a_1), \eta^k(a_2), ..., \eta^k(a_n)) \otimes \sum_{i=1}^{n} [\alpha^k(x_1), ..., D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(\eta^k(a_1), ..., f(a_i), ..., \eta^k(a_n)) \otimes [\alpha^k(x_1), ..., D(x_i), ..., \alpha^k(x_n)]_{\mathcal{N}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\zeta^k(a_1 \otimes x_1), ..., (f \otimes D)(a_i \otimes x_i), ..., \zeta^k(a_n \otimes x_n)].
\end{aligned}$$

D'ou $f \otimes D$ est une ζ^k-derivation de $A \otimes \mathcal{N}$. $\square$

1.5.2 Représentations d'algèbres Hom-Nambu n-aires

Dans cette section, nous étudions dans le cas général, la théorie des représentations des algèbres Hom-Nambu n-aires (voir [3]). Nous discutons en particulier les cas de représentations adjoint et coadjointes. Les résultats obtenus dans cette section généralisent ceux donnés dans le cas binaire dans [16]. La théorie des représentations des algèbres Hom-Lie a été étudiée indépendamment dans [57].

Définition 1.10. *Une représentation d'algèbre Hom-Nambu n-aire $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \tilde{\alpha})$ sur un espace vectoriel V est une application multilinéaire antisymétrique $\rho : \mathcal{N}^{n-1} \longrightarrow End(V)$, satisfaisant pour $x, y \in \mathcal{N}^{n-1}$ à l'identité*

$$\rho(\tilde{\alpha}(x)) \circ \rho(y) - \rho(\tilde{\alpha}(y)) \circ \rho(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \circ \nu \quad (1.5.3)$$

où ν est un endomorphisme sur V. Nous notons cette représentation par le triplet (V, ρ, μ).

Exemple 1.5. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \tilde{\alpha})$ une algèbre Hom-Nambu n-aire, alors l'application défini dans* (1.1.3) *est une représentation sur $\mathcal{N}$, et l'endomorphisme ν est l'application linéaire α_{n-1}. L'identité* (1.5.3) *est équivalent à l'identité de Hom-Nambu* (1.1.2). *Il est appelé représentation adjoint.*

Définition 1.11. *Deux représentations (V, ρ, μ) et (V', ρ', μ') sont* équivalentes *s'il existe une isomorphisme d'espace vectoriel $\Psi : V \to V'$ telle que $\Psi(x \cdot v) = x \cdot' \Psi(v)$ et $\nu' \circ \Psi = \Psi \circ \nu$, où $x \cdot v = \rho(x)(v)$ et $x \cdot' v' = \rho'(x)(v')$, pour $x \in \mathcal{N}$, $v \in V$ et $v' \in V'$. Alors V et V' sont des $\mathcal{N}^{n-1}$-module.*

Proposition 1.18. *Soit $(\mathcal{N}, [., ...,], \widetilde{\alpha})$ une algèbre Hom-Nambu n-aire et (V, ρ, ν) une représentation de $\mathcal{N}$. le triplet (V^*, ρ^*, ν^*), où $\rho^* : \mathcal{N}^{n-1} \to End(V^*)$ est donné par $\rho^* = -{}^t\rho$ et $\mu^* : V^* \to V^*$, $\quad f \mapsto \nu^*(f) = f \circ \nu$, définit une représentation d'algèbre Hom-Nambu n-aire $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ si et seulement si*

$$\rho(x) \circ \rho(\tilde{\alpha}(y)) - \rho(y) \circ \rho(\tilde{\alpha}(x)) = \sum_{i=1}^{n-1} \nu \circ \rho(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \quad (1.5.4)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{N}^*$, $x, y \in \mathcal{N}^{n-1}$ et $u \in \mathcal{N}$. Nous calculons le côté droit de l'identité (1.5.3)

$$\begin{aligned}
&\rho^*(\tilde{\alpha}(x)) \circ \rho^*(y)(f)(u) - \rho^*(\tilde{\alpha}(y)) \circ \rho^*(x)(f)(u)\\
&= -(\rho^*(y)(f)(\rho(\tilde{\alpha}(x)))(u)) + (\rho^*(x)(f)(\rho(\tilde{\alpha}(y)))(u))\\
&= f(\rho(y)(\rho(\tilde{\alpha}(x))(u))) - f(\rho(x)(\rho(\tilde{\alpha}(y))(u)))\\
&= f(\rho(y)(\rho(\tilde{\alpha}(x))(u)) - \rho(x)(\rho(\tilde{\alpha}(y))(u))).
\end{aligned}$$

D'autre part, la partie gauche de l'identité (1.5.3) s'écrit

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n-1} \rho^*(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \circ \nu^*(f))(u)\\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} (\nu^*(f)(\rho(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(u)))\\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} f(\nu(\rho(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(u)))\\
&= f(-\sum_{i=1}^{n-1} \nu(\rho(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(u))).
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'identité (1.5.4). □

Corollaire 1.19. *Soit $(\mathcal{N}, L, \alpha_{n-1})$ une représentation d'une algèbre Hom-Nambu n-aire $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$. On définit l'application $L^* : \mathcal{N}^{n-1} \to End(\mathcal{N}^*)$, pour $x \in \mathcal{N}^{n-1}$, $f \in \mathcal{N}^*$ et $y \in \mathcal{N}$, par $(L^*(x) \cdot f)(y) = -f(L(x) \cdot y)$.*
Alors $(\mathcal{N}^*, L^*, \alpha^*_{n-1})$ est une représentation de $\mathcal{N}$ si et seulement si

$$L(x)\circ L(\tilde{\alpha}(y)) - L(y)\circ L(\tilde{\alpha}(x)) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-1} \circ L(\alpha_1(x_1), ..., L(y)\cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})). \quad (1.5.5)$$

La représentation $(\mathcal{N}^*, L^*, \alpha^*_{n-1})$ est appelée représentation coadjointe.

1.6 Algèbre q-Virasoro-Witt ternaire

1.6.1 Algèbre Nambu-Lie ternaire de l'algèbre Virasoro-Witt ternaire

Dans cette section, nous définissons les algèbres Virasoro-Witt ternaires construites à travers la technique des algèbres enveloppantes $su(1,1)$ par Curtright, Fairlie et Zachos dans [20]

Définition 1.12. *Les algèbres ternaires données par un espace vectoriel W, engendré par $\{Q_n, R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ muni de la multiplication ternaire défini par le crochet ternaire*

$$[Q_k, Q_m, Q_n] = (k-m)(m-n)(n-k)R_{k+m+n} \tag{1.6.1}$$

$$[Q_k, Q_m, R_n] = (k-m)(Q_{k+m+n} + znR_{k+m+n}) \tag{1.6.2}$$

$$[Q_k, R_m, R_n] = (m-n)R_{k+m+n} \tag{1.6.3}$$

$$[R_k, R_m, R_n] = 0 \tag{1.6.4}$$

*sont appelées **algèbres Virasoro-Witt** ternaires.*

Remarque 1.3. *L'algèbre ternaire précédente est une algèbre Nambu-Lie si $z = \pm 2i$.*

Exemple 1.6. *Rappelons le lien avec les algèbres ternaires données par T. A. Larsson dans [44]. Il considère les opérateurs*

$$E_m = e^{imx}, \quad L_m = e^{imx}(-i\frac{d}{dx} + \lambda m). \tag{1.6.5}$$

Ces opérateurs satisfont les relations de commutation suivantes

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}, \quad [E_m, E_n] = 0, \quad [L_m, E_n] = nE_{m+n},$$

où le crochet c'est le commutateur usuel des opérations linéaires $[A,B] = AB - BA$. Sur toute algèbre associative munie d'une multiplication "$\cdot$", on peut définir la multiplication multi-linéaire ternaire

$$\begin{aligned}[x,y,z] &= x\cdot[y,z] + y\cdot[z,x] + z\cdot[x,y] \\ &= x\cdot(y\cdot z) - x\cdot(z\cdot y) + y\cdot(z\cdot x) - y\cdot(x\cdot z) + z\cdot(x\cdot y) - z\cdot(y\cdot x),\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

où $[\cdot,\cdot]$ *désigne le crochet commutateur usuel pour son algèbre de Lie correspondante* $([x,y] = x\cdot y - y\cdot x)$*. D'après* (1.6.6) *on obtient*

$$\begin{aligned}
[L_k, L_m, L_n] &= (\lambda-\lambda^2)(k-m)(m-n)(n-k)E_{k+m+n}\\
[L_k, L_m, E_n] &= (m-k)(L_{k+m+n} + (1-2\lambda)nE_{k+m+n})\\
[L_k, E_m, E_n] &= (n-m)E_{k+m+n}\\
[E_k, E_m, E_n] &= 0
\end{aligned}$$

Le crochet (1.6.1)-(1.6.4) *est obtenu en prenant, pour* $\lambda \neq 0$ *et* $\lambda \neq 1$

$$L_m = -(\lambda-\lambda^2)^{1/4}Q_m, \quad E_m = (\lambda-\lambda^2)^{-1/4}R_m, \quad z = -\frac{1-2\lambda}{(\lambda-\lambda^2)^{1/2}}.$$

Pour $z \neq \pm 2i$*, d'après la changement des générateurs, on obtient une réalisation des algèbres de Virasoro-Witt ternaires de Curtright, Fairlie et Zachos par les opérations suivantes*

$$\begin{aligned}
Q_m &= -(\lambda-\lambda^2)^{-1/4}e^{imx},\\
R_m &= e^{imx}(i(\lambda-\lambda^2)^{1/4}\frac{d}{dx} + \lambda(\lambda-\lambda^2)^{1/4}m).
\end{aligned}$$

1.6.2 Algèbre Nambu-Lie ternaire de l'algèbre q-Virasoro-Witt ternaire

Dans cette section, nous rappelons la description d'une famille des homomorphismes d'algèbres Nambu-Lie ternaires de Curtright, Fairlie et Zachos, donnée dans [6] et utiliser ceci et la méthode de composition pour définir les algèbres q-Virasoro-Witt. Nous utilisons aussi Corollaire 1.6 pour construire des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaire associées à celles des deux algèbres Virasoro-Witt définies (1.6.1)-(1.6.4) qui sont des algèbres de Nambu-Lie ternaires.

Proposition 1.20. *L'application linéaire définie sur l'algèbre Virasoro-Witt par*

$$f(Q_n) = q^n Q_n, \quad f(R_n) = q^n Q_n, \quad \textit{Pour } q \in \mathbb{K}, \tag{1.6.7}$$

est une endomorphisme d'algèbre Virasoro-Witt ternaire.

Théorème 1.21. *Soit W un espace vectoriel engendré par $\{Q_n, R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ muni de la multiplication ternaire $[\cdot,\cdot,\cdot]_q : W^3 \to W$ défini par le crochet ternaire*

$$[Q_k, Q_m, Q_n]_q = q^{k+m+n}(k-m)(m-n)(n-k)R_{k+m+n} \tag{1.6.8}$$

$$[Q_k, Q_m, R_n]_q = q^{k+m+n}(k-m)(Q_{k+m+n} + znR_{k+m+n}) \tag{1.6.9}$$

$$[Q_k, R_m, R_n]_q = q^{k+m+n}(m-n)R_{k+m+n} \tag{1.6.10}$$

$$[R_k, R_m, R_n]_q = 0 \tag{1.6.11}$$

pour $q \in \mathbb{K}$. Soit α une application linéaire sur W donnée par

$$\alpha(Q_n) = q^n Q_n, \quad \alpha(R_n) = q^n R_n. \tag{1.6.12}$$

Alors $(W, [\cdot,\cdot,\cdot]_q, (\alpha,\alpha))$ est une algèbre Hom-Nambu-Lie si $z = 2 \pm i$.

1.6.3 Algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire de l'algèbre q-Virasoro-Witt ternaire

Pour $z \neq \pm 2i$ et $q \in \mathbb{C}$, les algèbres q-Virasoro-Witt ternaires, définies par (1.6.8)-(1.6.9), sont des algèbres Hom-Nambu qui sont obtenues de la méthode de composition à partir des algèbres de Virasoro-Witt ternaires de Curtright, Fairlie et Zachos qui sont des algèbres Namdu-Lie. Pour $z = \pm 2i$ cela ne marche pas puisque l'algèbre Virasoro-Witt n'est pas de Nambu-Lie, d'une autre manière ces algèbres peut être de Hom-Nambu-Lie.

Le résultat suivant montre que les algèbres q-Virasoro-Witt ternaires définies par les crochets (1.6.8)-(1.6.11) sont munies, pour toute valeur de z et de q, d'une structure d'algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire.

Théorème 1.22 ([6])**.** *Soit W un espace vectoriel engendré par $\{Q_n, R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Soient α_1 et α_2 deux applications linéaires sur W définies sur les générateurs par*

$$\alpha_1(Q_n) = a_n^1 Q_n + b_n^1 R_n, \quad \alpha_1(R_n) = c_n^1 Q_n + d_n^1 R_n, \tag{1.6.13}$$

$$\alpha_2(Q_n) = a_n^2 Q_n + b_n^2 R_n, \quad \alpha_2(R_n) = c_n^2 Q_n + d_n^2 R_n. \tag{1.6.14}$$

Supposons en outre que $a_n^i,\ b_n^i,\ c_n^i,\ d_n^i,\ i = 1,2$ sont soit 0 ou tous dans $\mathbb{Z}$.

Alors les algèbres q-Virasoro-Witt ternaires définies par les crochets (1.6.8)-(1.6.11) *sont des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires munis des applications linéaires α_1 et α_2,* *pour toutes valeurs de z et q, si et seulement si*

$$\alpha_1(Q_n) = \beta_1 q^n R_n, \quad \alpha_1(R_n) = 0, \tag{1.6.15}$$

$$\alpha_2(Q_n) = \beta_2 q^n R_n, \quad \alpha_2(R_n) = 0, \tag{1.6.16}$$

où $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{K}$.

Dans le cas particulier $q = 1$, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 1.23. *Soient α_1 et α_2 deux applications linéaires sur W définies sur les générateurs par*

$$\alpha_1(Q_n) = a_n^1 Q_n + b_n^1 R_n, \quad \alpha_1(R_n) = c_n^1 Q_n + d_n^1 R_n, \tag{1.6.17}$$

$$\alpha_2(Q_n) = a_n^2 Q_n + b_n^2 R_n, \quad \alpha_2(R_n) = c_n^2 Q_n + d_n^2 R_n. \tag{1.6.18}$$

Supposons en outre que $a_n^i,\ b_n^i,\ c_n^i,\ d_n^i,\ i = 1, 2$ sont soit 0 ou tous dans $\mathbb{Z}$.

Alors les algèbres de Virasoro-Witt ternaires sur W définies par les crochets (1.6.1)-(1.6.4) *sont des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires munies des applications linéaires α_1 et α_2, pour tout valeurs de z , si et seulement si*

$$\alpha_1(Q_n) = \beta_1 R_n, \quad \alpha_1(R_n) = 0, \tag{1.6.19}$$

$$\alpha_2(Q_n) = \beta_2 R_n, \quad \alpha_2(R_n) = 0, \tag{1.6.20}$$

où $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{K}$.

Chapitre 2

Cohomologie des algèbres Hom-Nambu n-aires

Le but de ce chapitre est de fournir une cohomologie adaptée aux extensions centrales d'algèbres de Hom-Nambu-Lie multiplicatives n-aires dans la première section. Dans la section 2 on définit une cohomologie qui est appropriée pour l'étude des déformations formelles à un paramètre d'algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires et dans la dernière section nous montrons que la cohomologie, à valeurs dans l'algèbre, des algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires peut être dérivée du complexe de cohomologie des algèbres Hom-Leibniz.

2.1 Algèbre Hom-Leibniz induite par une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative

Dans ce paragraphe nous montrons que pour une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$, l'espace $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ appelé espace fondamentale noté $\mathcal{L}(\mathcal{N})$, est muni d'une structure d'algèbre Hom-Leibniz.

Définition 2.1. *Une algèbre Hom-Leibniz est un triplet* $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ *constitué d'un espace vectoriel* L*, d'une application bilinéaire* $[\cdot, \cdot] : L \times L \to L$ *et d'une application linéaire* $\alpha : L \to L$ *satisfaisant*

$$[\alpha(x), [y, z]] = [[x, y], \alpha(z)] + [\alpha(y), [x, z]] \tag{2.1.1}$$

Notations 2.1. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative . Sur* $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ *qui est l'ensemble des éléments* $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ *qui sont antisymétriques dans leur arguments. Pour* $x = x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in \wedge^{n-1}\mathcal{N},\ y = y_1 \wedge ... \wedge y_{n-1} \in \wedge^{n-1}\mathcal{N},\ z \in \mathcal{N}$, *on définit*

- *L'application linéaire* $L : \wedge^{n-1}\mathcal{N} \longrightarrow End(\mathcal{N})$ *par*

$$L(x) \cdot z = [x_1, ..., x_{n-1}, z], \tag{2.1.2}$$

et s'étendant linéairement à tous les éléments de $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$*. notons que* $L(x) \cdot z = ad(x)(z)$.

- *Une application linéaire* $\tilde{\alpha} : \wedge^{n-1}\mathcal{N} \longrightarrow \wedge^{n-1}\mathcal{N}$ *par* $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x_1) \wedge ... \wedge \alpha(x_{n-1})$,
- *Une application bilinéaire* $[\cdot, \cdot]_\alpha : \wedge^{n-1}\mathcal{N} \times \wedge^{n-1}\mathcal{N} \longrightarrow \wedge^{n-1}\mathcal{N}$ *par*

$$[x, y]_\alpha = L(x) \bullet_\alpha y = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\alpha(y_1), ..., L(x) \cdot y_i, ..., \alpha(y_{n-1})\big), \tag{2.1.3}$$

On note $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ *l'espace* $\wedge^{n-1}\mathcal{N}$ *et on l'appelle l'ensemble fondamental.*

Lemme 2.1. *L'application* L *satisfait*

$$L([x, y]_\alpha) \cdot \alpha(z) = L(\alpha(x)) \cdot \big(L(y) \cdot z\big) - L(\alpha(y)) \cdot \big(L(x) \cdot z\big) \tag{2.1.4}$$

pour tout $x,\ y \in \mathcal{L}(\mathcal{N}),\ z \in \mathcal{N}$.

Proposition 2.2. *Le triplet* $\big(\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ [\cdot, \cdot]_\alpha,\ \alpha\big)$ *est une algèbre Hom-Leibniz.*

Démonstration. Soit $x = x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1},\ y = y_1 \wedge ... \wedge y_{n-1}$ et $u = u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, l'identité Hom-Leibniz (2.1.1) peut s'écrite sous la forme

$$\big[[x, y]_\alpha, \alpha(u)\big]_\alpha = \big[\alpha(x), [y, u]_\alpha\big]_\alpha - \big[\alpha(y), [x, u]_\alpha\big]_\alpha \tag{2.1.5}$$

et équivalente pour $v \in \mathcal{N}$ à

$$\begin{aligned} &\Big(L\big(L(x) \bullet_\alpha y\big) \bullet_\alpha \tilde{\alpha}(u)\Big) \cdot (v) \\ &= \Big(L(\alpha(x)) \bullet_\alpha \big(L(y) \bullet_\alpha u\big)\Big) \cdot (v) - \Big(L(\alpha(y)) \bullet_\alpha \big(L(x) \bullet_\alpha u\big)\Big) \cdot (v). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Commençons tout d'abord par $\Big(L(\tilde{\alpha}(x)) \bullet_\alpha \big(L(y) \bullet_\alpha u\big)\Big)$. Ce qui est donné par

$$\begin{aligned}\Big(L(\alpha(x)) \bullet_\alpha \big(L(y) \bullet_\alpha u\big)\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} L(\alpha(x)) \bullet_\alpha \big(\alpha(u_1), ..., L(y)\cdot u_i, ..., \alpha(u_{n-1})\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i\neq j, j=0}^{n-1} \big(\alpha^2(u_1), ..., \alpha(L(x)\cdot u_j), ..., \alpha(L(y)\cdot u_i) ..., \alpha^2(u_{n-1})\big) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \big(\alpha^2(u_1), ..., L(\tilde{\alpha}(x))\cdot(L(y)\cdot u_i), ..., \alpha^2(u_{n-1})\big).\end{aligned}$$

La partie droite de (2.1.6) est antisymétrique pour x, y. Ainsi,

$$\Big(L(\alpha(x)) \bullet_\alpha \big(L(y) \bullet_\alpha u\big)\Big) - \Big(L(\alpha(y)) \bullet_\alpha \big(L(x) \bullet_\alpha u\big)\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^2(u_1), ..., \{L(\alpha(x))\cdot(L(y)\cdot u_i) - L(\alpha(y))\cdot(L(x)\cdot u_i)\}, ..., \alpha^2(u_{n-1})\big). \tag{2.1.7}$$

D'autre part, d'après la définition (2.1.3), on trouve

$$\begin{aligned}&\Big(L\big(L(x) \bullet_\alpha y\big) \bullet_\alpha \tilde{\alpha}(u)\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \big(\alpha^2(u_1), ..., \alpha^2(u_{i-1}), [\alpha(y_1), ..., L(x)\cdot y_j, ..., \alpha(y_{n-1}), \alpha(u_i)], \alpha^2(u_{i+1}), ..., \alpha^2(u_{n-1})\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \big(\alpha^2(u_1), ..., \alpha^2(u_{i-1}), [x, y]_\alpha \cdot \alpha(u_i), \alpha^2(u_{i+1}), ..., \alpha^2(u_{n-1})\big).\end{aligned}$$

L'identité (2.1.1) est satisfaite par le lemme 2.1.

□

Remarque 2.1. *On obtient le même résultat si on considère l'espace $T\mathcal{N} = \otimes^n \mathcal{N}$ au lieu de $\mathcal{L}(\mathcal{N})$.*

2.2 Extensions centrales et cohomologie scalaire des algèbres Hom-Nambu n-aires multiplicatives

2.2.1 Extensions centrales d'algèbres Hom-Nambu n-aires multiplicatives

Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplilicative

Définition 2.2. *Nous définissons une extension centrale $\tilde{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ en ajoutant un nouveau générateur e, qui est central et en modifiant le crochet comme suit : pour tout $\tilde{x}_i = x_i + a_i e$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \leq n$*

$$[\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n]_{\widetilde{\mathcal{N}}} = [x_1, ..., x_n] + \varphi(x_1, ..., x_n)e, \tag{2.2.1}$$

$$\beta(\widetilde{x}_i) = \alpha(x_i) + \lambda(x_i)e, \tag{2.2.2}$$

$$[\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{n-1}, e]_{\widetilde{\mathcal{N}}} = 0, \tag{2.2.3}$$

où $\lambda : \mathcal{N} \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

Nous faisons les observations suivantes :

- Il est clair que φ doit être une application n-linéaire antisymétrique , $\varphi \in \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \wedge \mathcal{N}^*$, où $\mathcal{N}^*$ est le dual de $\mathcal{N}$. Il sera identifié avec une 1-cochaine.
- Le nouveau crochet, pour $\tilde{x}_i \in \widetilde{\mathcal{N}}$ doit satisfaire l'identité Hom-Nambu. Cela conduit à une condition sur φ lorsque l'un des vecteurs en cause est e.
- Puisque l'élément e est central alors l'identité Hom-Nambu n'a aucune restriction sur λ. Pour $\tilde{x}_i = x_i + a_i e \in \tilde{\mathcal{N}}$, $\tilde{y}_i = y_i + b_i e \in \tilde{\mathcal{N}}$, $\; 1 \leq i \leq n$, on a

$$\big[\beta(\tilde{x}_1), ..., \beta(\tilde{x}_{n-1}), [\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n]_{\widetilde{\mathcal{N}}}\big]_{\widetilde{\mathcal{N}}} = \sum_{i=1}^{n-1} \big[\beta(\tilde{y}_1), ..., \beta(\tilde{y}_{i-1}), [\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{n-1}, y_i]_{\widetilde{\mathcal{N}}}.\beta(\tilde{y}_{i+1}), ..., \beta(\tilde{y}_n)\big]_{\widetilde{\mathcal{N}}},$$

  D'après (2.2.1) et l'identité Hom-Nambu de l'algèbre originale, on obtient

$$\varphi\big(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]\big) - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi\big(\alpha(y_1), ..., \alpha(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], \alpha(y_{i+1}), ..., \alpha(y_n)\big) = 0, \tag{2.2.4}$$

- L'équation précédente peut être écrite comme

$$\delta^1\varphi(x, y, z) = 0$$

  où $x = x_1 \otimes ... \otimes x_{n-1} \in \mathcal{N}^{\otimes n-1}$, $\; y = y_1 \otimes ... \otimes y_{n-1} \in \mathcal{N}^{\otimes n-1}$, $\; z = y_n \in \mathcal{N}$.

  Nous fournissons ci-dessous la condition qui caractérise $\varphi \in \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \wedge \mathcal{N}^*$, φ :

$x \wedge z \rightarrow \varphi(x,z)$ comme un 1-cocycle. On voit maintenant pourquoi on appele φ un 1-cochaine (plutôt que une 2-cochaine, comme il est indiqué dans le cas de la cohomologie des algèbres Hom-Lie dans [51]).

– Le nombre d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ dans l'argument d'une cochaine détermine son ordre. Comme nous le verrons bientôt, une p-cochaine prend $p(n-1)+1$ arguments dans $\mathcal{N}$. Une 0-cochaine est un élément de $\mathcal{N}^*$.

2.2.2 Cohomologie scalaire des algèbres de Hom-Nambu n-aires multiplicatives

Voyons maintenant la construction de la cohomologie adaptée aux extensions centrales des algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires multiplicatives. Puisque $\mathcal{N}$ n'agit pas sur $\varphi(x,z)$, ce sera la cohomologie des algèbres Hom-Nambu-Lie multiplicatives de l'action triviale.

Définition 2.3. *on définit une p-cochaine comme un élément $\varphi \in \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \otimes ... \otimes \wedge^{n-1}\mathcal{N}^* \wedge \mathcal{N}^*$,*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(\mathcal{N}) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(\mathcal{N}) \wedge \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, .., x_p, z) & \longmapsto & \varphi(x_1, .., x_p, z) \end{array}$$

On note l'ensemble des p-cochaines sur $\mathbb{K}$ par $C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$.

Remarque 2.2. *La condition* (2.2.4) *garantit la cohérence de φ en fonction de* (2.2.1) *avec l'identité Hom-Nambu* (1.1.2). *Alors*

$$\delta^1\varphi(x,y,z) = \varphi\big(\alpha(x), L(y)\cdot z\big) - \varphi\big(\alpha(y), L(x)\cdot z\big) - \varphi\big([x,y]_\alpha, \alpha(z)\big) = 0, \qquad (2.2.5)$$

où $L(x)\cdot z$ et $[x,y]_\alpha$ sont définis dans (2.1.2) *et* (2.1.3). *Il est maintenant simple d'étendre* (2.2.5) *à un complexe de cohomologie ; $\delta^p\varphi$ sera une $(p+1)$-cochaine prenant un argument de plus dans $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ que φ.*

Définition 2.4. *Soit $\varphi \in C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$ une p-cochaine d'une algèbre Hom-Nambu-Lie multiplicative $\mathcal{N}$. Un opérateur cobord δ^p agissant sur une p-cochaine est donné par*

$$\begin{aligned}\delta^p\varphi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{1\leq i<j}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(x_1),...,\hat{x}_i,...,[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(z)\big) \\ &+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(x_1),...,\hat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),L(x_i)\cdot z\big)\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

où $x_1,...,x_{p+1}\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$, $z\in\mathcal{N}$ *et* $\hat{x}_i$ *signifie que* x_i *est omis.*

Proposition 2.3. *Soit* $\varphi\in C^p(\mathcal{N},\mathbb{K})$ *une p-cochaine, alors*

$$\delta^{p+1}\circ\delta^p(\varphi)=0.$$

Démonstration. Soit φ une p-cochaine, $(x_i)_{1\leq i\leq p}\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$ et $z\in\mathcal{N}$, on peut écrire δ^p et $\delta^{p+1}\circ\delta^p$ comme

$$\delta^p=\delta_1^p+\delta_2^p \quad \text{et} \quad \delta^{p+1}\circ\delta^p=\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{21}+\eta_{22}$$

où $\eta_{ij}=\delta_i^{p+1}\circ\delta_j^p$, $1\leq i,j\leq 2$, et

$$\begin{aligned}\delta_1^p\varphi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{1\leq i<j}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(x_1),...,\hat{x}_i,...,[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(z)\big) \\ \delta_2^p\varphi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\varphi\big(\alpha(x_1),...,\hat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),L(x_i)\cdot z\big)\end{aligned}$$

Commençons tout d'abord par $\eta_{11}\varphi(x_1,...,x_{p+1},z)$. Qui est donné par

$$\begin{aligned}&\eta_{11}(\varphi)(x_1,...,x_{p+1},z) \\ =&\sum_{1\leq i<k<j}^{p+1}(-1)^{i+k}\varphi\big(\alpha^2(x_1),...,\widehat{x_i},...,\widehat{\alpha(x_k)},...,[\alpha(x_k),[x_i,x_j]_\alpha]_\alpha,....,\alpha^2(x_{p+1}),\alpha^2(z)\big) \\ +&\sum_{1\leq i<k<j}^{p+1}(-1)^{i+k-1}\varphi\big(\alpha^2(x_1),...,\widehat{\alpha(x_i)},...,\widehat{x_k},...,[\alpha(x_i),[x_k,x_j]_\alpha]_\alpha,....,\alpha^2(x_{p+1}),\alpha^2(z)\big) \\ +&\sum_{1\leq i<k<j}^{p+1}(-1)^{i+k-1}\varphi\big(\alpha^2(x_1),...,\widehat{x_i},...,\widehat{[x_i,x_k]}_\alpha,...,[[x_i,x_k]_\alpha,\alpha(x_j)]_\alpha,....,\alpha^2(x_{p+1}),\alpha^2(z)\big).\end{aligned}$$

D'où l'application de l'identité Hom-Leibniz (2.1.5) pour $x_i,\ x_j,\ x_k \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, on trouve $\eta_{11} = 0$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}
&\eta_{21}(\varphi)(x_1, ..., x_{p+1}, z) + \eta_{12}(\varphi)(x_1, ..., x_{p+1}, z) = \\
&\sum_{1\leq i<j}^{p+1} (-1)^{i-1}\varphi\big(\alpha^2(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \widehat{[x_i, x_j]_\alpha}, ..., \alpha^2(x_{p+1}), L([x_i, x_j]_\alpha) \cdot \alpha(z)\big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\eta_{22}(\varphi)(x_1, ..., x_{p+1}, z) \\
= &\sum_{1\leq i<j}^{p+1} (-1)^{i}\varphi\big(\alpha^2(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha^2(x_{p+1}), \big(L(\alpha(x_i)) \cdot (L(x_j) \cdot z)\big)\big) \\
+ &\sum_{1\leq i<j}^{p+1} (-1)^{i-1}\varphi\big(\alpha^2(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{x}_j, ..., \alpha^2(x_{p+1}), \big(L(\alpha(x_j)) \cdot (L(x_i) \cdot z)\big)\big).
\end{aligned}$$

Alors en appliquant (2.1) pour $x_i,\ x_j \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ et $z \in \mathcal{N}$, on a $\eta_{12} + \eta_{21} + \eta_{22} = 0$.
Ce qui termine la preuve. □

Définition 2.5. *L'espace des p-cocycles est défini par*

$$Z^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) : \delta^p\varphi = 0\},$$

et l'espace des p-cobords est défini par

$$B^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) = \{\psi = \delta^{p-1}\varphi : \varphi \in C^{p-1}(\mathcal{N}, \mathbb{K})\}.$$

Lemme 2.4. $B^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) \subset Z^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})$.

Définition 2.6. *On appelle p-groupe de cohomologie scalaire le quotient*

$$H^p(\mathcal{N}, \mathbb{K}) = \frac{Z^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})}{B^p(\mathcal{N}, \mathbb{K})}.$$

2.3 Déformation et cohomologie des algèbres Hom-Nambu n-aires

Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à une variable t et a coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{N}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles dont les coefficients sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{N}$. Étant donnée une application $\mathbb{K}$-n-linéaire $\varphi : \mathcal{N} \times ... \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, elle admet naturellement une extension $\mathbb{K}[[t]]$-n-linéaire $\varphi : \mathcal{N}[[T]] \times ... \times \mathcal{N}[[t]] \to \mathcal{N}[[t]]$, définie, si $x_i = \sum_{j\geq 0} a_i^j t^j$, $1 \leq i \leq n$, par

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{j_1,...,j_n \geq 0} t^{j_1+...+j_n} \varphi(a_1^{j_1}, ..., a_n^{j_n}).$$

On a la même chose pour les applications linéaires.

Définition 2.7. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire. Une déformation formelle de* $\mathcal{N}$ *est donnée par une application* $\mathbb{K}[[t]]$*-n-linéaire*

$$[\cdot, ..., \cdot]_t : \mathcal{N}[[t]] \times ... \times \mathcal{N}[[t]] \to \mathcal{N}[[t]]$$

de la forme $[\cdot, ..., \cdot]_t = \sum_{i\geq 0} t^i [\cdot, ..., \cdot]_i$ *où* $[\cdot, ..., \cdot]_i$ *est une application* $\mathbb{K}[[t]]$*-n-linéaire* $[\cdot, ..., \cdot]_i : \mathcal{N} \times ... \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *(étendue à une application* $\mathbb{K}[[t]]$*-n-linéaire), et* $[\cdot, ..., \cdot]_0 = [\cdot, ..., \cdot]$ *telle que pour* $(x_i)_{1\leq i\leq n-1}$, $(y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{N}$

$$\big[\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]_t\big]_t =$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} \big[\alpha_1(y_1), ..., \alpha_{i-1}(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i]_t, \alpha_i(y_{i+1}), ..., \alpha_{n-1}(y_n)\big]_t. \tag{2.3.1}$$

La déformation est dite d'ordre k si $[\cdot, ..., \cdot]_t = \sum_{i=0}^{k} t^i [\cdot, ..., \cdot]_i$ *et infinitésimale si* $t^2 = 0$.
La condition ci-dessus peut être écrite pour $x = (x_i)_{1\leq i\leq n-1}$, $y = (y_i)_{1\leq i\leq n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ *et en prenant* $z = y_n$ *à*

$$L_t([x, y]_\alpha) \cdot \alpha_n(z) = L_t(\tilde{\alpha}(x)) \cdot \big(L_t(y) \cdot z\big) - L_t(\tilde{\alpha}(y)) \cdot \big(L_t(x).z\big) \tag{2.3.2}$$

où $L_t(x) \cdot z = [x_1, ..., x_{n-1}, z]_t$ *et* $\tilde{\alpha}(x) = (\alpha_i(x_i))_{1\leq i\leq n-1}$.
Maintenant soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ *une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire* $(\alpha_1 = ... = \alpha_n = \alpha)$.

Eq. (2.3.2) est équivalente, si la déformation infinitésimale et en notant $\psi = [\cdot, \cdots, \cdot]_1$, à

$$
\begin{aligned}
& \big[\alpha(x_1), ..., \alpha(x_{n-1}), \psi(y_1, ..., y_n)\big] + \psi\big(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_{n-1}), [y_1, ..., y_n]\big) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \big[\alpha(y_1), ..., \alpha(y_{i-1}), \psi(x_1, ..., x_{n-1}, y_i), \alpha(y_{i+1}), ..., \alpha(y_n)\big] \\
+ & \sum_{i=1}^{n} \psi\big(\alpha(y_1), ..., \alpha(y_{i-1}), [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], \alpha(y_{i+1}), ..., \alpha(y_n)\big).
\end{aligned}
$$

Cette identité peut être considérée comme la condition de 1-cocycle $\delta^1\psi = 0$ pour une $\mathcal{N}$-cochaine ψ. Par les termes $x,\ y \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ elle peut être écrite, (prendre de nouveau $y_n = z$), sous la forme

$$
\begin{aligned}
\delta^1\psi(x, y, z) &= \psi(\alpha(x), L(y)\cdot z) - \psi(\alpha(y), L(x)\cdot z) - \psi([x_1, x_2]_\alpha, \alpha(z)) \\
&+ L(\alpha(x))\cdot\psi(y, z) - L(\alpha(y))\cdot\psi(x, z) + \big(\psi(x, \quad)\cdot y\big) \bullet_\alpha \alpha(z)
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

où

$$
\big(\psi(x, \quad)\cdot y\big) \bullet_\alpha \alpha(z) = \sum_{i=0}^{n-1}[\alpha(y_1), ..., \psi(x, y_i), ..., \alpha(y_{n-1}), \alpha(z)]. \tag{2.3.4}
$$

Définition 2.8. *Une p-cochaine est une application $(p+1)$-linéaire $\varphi : \mathcal{L}(\mathcal{N}) \otimes ... \otimes \mathcal{L}(\mathcal{N}) \wedge \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, telle que*

$$
\alpha \circ \varphi(x_1, ..., x_p, z) = \varphi(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_p), \alpha(z)).
$$

On note l'ensemble des p-cochaines par $C^p(\mathcal{N}, \mathcal{N})$.

Définition 2.9. *On appelle, pour $p \geq 1$, opérateur p-cobord d'une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ l'application linéaire $\delta^p : C^p(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ définie par*

$$\begin{aligned}
\delta^p\psi(x_1,...,x_p,x_{p+1},z) &= \sum_{1\leq i\leq j}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{\alpha(x_i)},...,\alpha(x_{j-1}),[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(z)\big)\\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{\alpha(x_i)},...,\alpha(x_{p+1}),L(x_i)\cdot z\big)\\
&+ \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}L(\alpha^p(x_i))\cdot\psi\big(x_1,...,\widehat{x_i},...,x_{p+1},z\big)\\
&+ (-1)^p\big(\psi(x_1,...,x_p,\ )\cdot x_{p+1}\big)\bullet_\alpha\alpha^p(z) \qquad (2.3.5)
\end{aligned}$$

où

$$\big(\psi(x_1,...,x_p,\ )\cdot x_{p+1}\big)\bullet_\alpha\alpha^p(z)=\sum_{i=1}^{n-1}[\alpha^p(x_{p+1}^1),...,\psi(x_1,...,x_p,x_{p+1}^i),...,\alpha^p(x_{p+1}^{n-1}),\alpha^p(z)], \qquad (2.3.6)$$

pour $x_i=(x_i^j)_{1\leq j\leq n-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ 1\leq i\leq p+1,\ z\in\mathcal{N}.$

Proposition 2.5. *Soit* $\psi\in C^p(\mathcal{N},\mathcal{N})$ *une p-cochaine, alors*

$$\delta^{p+1}\circ\delta^p(\psi)=0.$$

Démonstration. Soit ψ une p-cochaine, $x_i=(x_i^j)_{1\leq j\leq n-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ 1\leq i\leq p+2$ et $z\in\mathcal{N}$. On a

$$\delta^p=\delta_1^p+\delta_2^p+\delta_3^p+\delta_4^p,\quad \text{and}\quad \delta^{p+1}\circ\delta^p=\sum_{i,j=1}^{4}\eta_{ij},$$

Lorsque $\eta_{ij}=\delta_i^{p+1}\circ\delta_j^p$ et

$$\begin{aligned}
\delta_1^p\psi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{1\leq i<j}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x_i},...,[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(z)\big)\\
\delta_2^p\psi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x_i},...,\alpha(x_{p+1}),L(x_i).z\big)\\
\delta_3^p\psi(x_1,...,x_{p+1},z) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}L(\alpha^p(x_i))\cdot\psi\big(x_1,...,\widehat{x_i},...,x_{p+1},z\big)\\
\delta_4^p\psi(x_1,...,x_{p+1},z) &= (-1)^p\big(\psi(x_1,...,x_p,\ )\cdot x_{p+1}\big)\bullet_\alpha\alpha^p(z)
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on remplace $L(x)\cdot z$ par $x\cdot z$.
La démonstration de $\eta_{11}+\eta_{12}+\eta_{21}+\eta_{22}=0$ est similaire à la démonstration de la Proposition 2.3.
D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\eta_{13}\psi(x_1,...,x_{p+2},z) &= \sum_{1\leq i<j<k}^{p+2}\big\{(-1)^{k+i}\alpha^{p+1}(x_k)\cdot\psi(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,[x_i,x_j]_\alpha,...,\widehat{x}_k,...,\alpha(z))\\
&+ (-1)^{j+i}\alpha^{p+1}(x_j)\cdot\psi(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,[x_i,x_k]_\alpha,...,\alpha(z))\\
&+ (-1)^{j+i-1}\alpha^{p+1}(x_i)\cdot\psi(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,[x_j,x_k]_\alpha,...,\alpha(z))\big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{31}\psi(x_1,...,x_{p+2},z) &= -\eta_{13}\psi(x_1,...,x_{p+2},z)\\
&+ \sum_{1\leq i<j}^{p+2}(-1)^{i+j}\alpha^p([x_i,x_j]_\alpha)\cdot\alpha\big(\psi(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,z)\big)\\
\eta_{33}\psi(x_1,...,x_{p+2},z) &= \sum_{1\leq i<j}^{p+2}\Big\{(-1)^{i+j}\alpha^{p+1}(x_i)\cdot\big(\alpha^p(x_j).\big(\psi(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,z)\big)\big)\\
&+ (-1)^{i+j-1}\alpha^{p+1}(x_j)\cdot\big(\alpha^p(x_i)\cdot\big(\psi(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,z)\big)\big)\Big\}
\end{aligned}$$

Alors, en appliquant le lemme 2.1 à $\alpha^p(x_i)\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$, $\alpha^p(x_j)\in\mathcal{L}(\mathcal{N})$ et $\psi(x_1,...,\widehat{x}_i,...,\widehat{x}_j,...,z)\in\mathcal{N}$, on a

$$\eta_{13}+\eta_{33}+\eta_{31}=0.$$

Par le même calcule, nous pouvons prouver que

$$\eta_{23}+\eta_{32}=0.$$

Nous avons aussi

$$
\begin{aligned}
&\eta_{14}\psi(x_1,...,x_{p+2},z)\\
&=(-1)^p\sum_{1\leq i<j}^{p+1}(-1)^i\sum_{k=1}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,[x_i,x_j]_\alpha,...,\alpha(x_p),\alpha(x^k_{p+1})\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big]\\
&+(-1)^p\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\sum_{k,l=1;k\neq l}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\alpha^p(x_i\cdot x^l_{p+2}),...,\\
&\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(x^k_{p+2})\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big]\\
&+(-1)^p\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\sum_{k=1}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),x_i\cdot x^k_{p+2}\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big].
\end{aligned}
$$

Le premier terme de η_{14} est égal à $-\eta_{41}$. d'où

$$
\begin{aligned}
&(\eta_{14}+\eta_{41})\psi(x_1,...,x_{p+2},z)=\\
=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{p+i}\sum_{k,l=1;k\neq l}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\alpha^p(x_i\cdot x^l_{p+2}),...,\\
&\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(x^k_{p+2})\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big]\\
+&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{p+i}\sum_{k=1}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),x_i\cdot x^k_{p+2}\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big],\\
&\eta_{24}\psi(x_1,...,x_{p+2},z)\\
=&\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{p+i}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),\alpha(x^k_{p+2})\big),...,\alpha^p(x_i\cdot z)\big]\\
+&\sum_{k=1}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+1}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_p),\alpha(x^k_{p+1})\big),...,\alpha^p(x_{p+2}\cdot z)\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta_{42}\psi(x_1,...,x_{p+2},z)\\
=&(-1)^{p+1}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\sum_{k=1}^{n-1}\big[\alpha^{p+1}(x^1_{p+2}),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\widehat{x}_i,...,\alpha(x_{p+1}),x_i\cdot x^k_{p+2}\big),...,\alpha^{p+1}(z)\big].
\end{aligned}
$$

D'ou, $-\eta_{42}$ et le deuxième terme de $(\eta_{14}+\eta_{41})$ sont égaux.

En utilisant l'identité Hom-Nambu pour les entiers $1 \leq i \leq p+1$ et $1 \leq k \leq n-1$

$$\alpha^{p+1}(x_i) \cdot \big[\alpha^p(x_{p+2}^1), ..., \psi\big(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{p+1}, x_{p+2}^k\big), ..., \alpha^p(z)\big] =$$
$$= \sum_{l=1;l\neq k}^{n-1} \Big\{\big[\alpha^{p+1}(x_{p+2}^1), ..., \alpha^p(x_i \cdot x_{p+2}^l), ..., \psi\big(\alpha(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \alpha(x_{p+1}), \alpha(x_{p+2}^k)\big), ..., \alpha^{p+1}(z)\big]\Big\}$$
$$+ \big[\alpha^{p+1}(x_{p+2}^1), ..., \psi\big(\alpha(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \alpha(x_{p+1}), \alpha(x_{p+2}^k)\big), ..., \alpha^p(x_i \cdot z)\big]$$
$$+ \big[\alpha^{p+1}(x_{p+1}^1), ..., \alpha^p(x_i) \cdot \psi\big(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{p+1}, x_{p+2}^k\big), ..., \alpha^{p+1}(z)\big].$$

Quand nous additionnons les quatre termes η_{14}, η_{41}, η_{24} et η_{42}, on obtient

$$(\eta_{14} + \eta_{41} + \eta_{24} + \eta_{42})\psi(x_1, ..., x_{p+2}, z) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+p} \sum_{l=1}^{n-1} \big[\alpha^{p+1}(x_{p+2}^1), ..., \alpha^p(x_i) \cdot \psi\big(\alpha(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \alpha(x_{p+1}), \alpha(x_{p+2}^k)\big), ..., \alpha^{p+1}(z)\big]$$
$$+ (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{p+1}(x_i) \cdot \big[\alpha^p(x_{p+2}^1), ..., \psi\big(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{p+1}, x_{p+2}^k\big), ..., \alpha^p(z)\big]$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \big[\alpha^{p+1}(x_{p+1}^1), ..., \psi\big(\alpha(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \alpha(x_p), \alpha(x_{p+1}^k)\big), ..., \alpha^p(x_{p+2} \cdot z)\big]$$

et

$$\eta_{43}\psi(x_1, ..., x_{p+2}, z) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{p+i} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{p+1}(x_i) \cdot \big[\alpha^p(x_{p+2}^1), ..., \psi\big(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{p+1}, x_{p+2}^k\big), ..., \alpha^p(z)\big]$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{p+1}(x_{p+2}) \cdot \big[\alpha^p(x_{p+1}^1), ..., \psi\big(x_1, ..., x_p, x_{p+1}^k\big), ..., \alpha^p(z)\big],$$

$$\eta_{34}\psi(x_1, ..., x_{p+2}, z) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+p+1} \sum_{l=1}^{n-1} \big[\alpha^{p+1}(x_{p+2}^1), ..., \alpha^p(x_i) \cdot \psi\big(\alpha(x_1), ..., \widehat{x}_i, ..., \alpha(x_{p+1}), \alpha(x_{p+2}^k)\big), ..., \alpha^{p+1}(z)\big].$$

D'ou

$$
\begin{aligned}
&(\eta_{14}+\eta_{41}+\eta_{24}+\eta_{42}+\eta_{34}+\eta_{43})\psi(x_1,...,x_{p+2},z) = -\eta_{44}\psi(x_1,...,x_{p+2},z) = \\
= \quad & -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\alpha^{p+1}(x_{p+2}^1),...,[\alpha^p(x_{p+1}^1),...,\psi\big(x_1,...,x_p,x_{p+1}^k\big),...,\alpha^p(x_{p+2}^i)],...,\alpha^{p+1}(x_{p+2}^{n-1}),\alpha^{p+1}(z)\right] \\
= \quad & -\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{p+1}(x_{p+2})\cdot[\alpha^p(x_{p+1}^1),...,\psi\big(x_1,...,x_p,x_{p+1}^k\big),...,\alpha^p(z)] \\
+ \quad & \sum_{k=1}^{n-1}[\alpha^{p+1}(x_{p+1}^1),...,\psi\big(\alpha(x_1),...,\alpha(x_p),\alpha(x_{p+1}^k)\big),...,\alpha^p(x_{p+2}\cdot z)].
\end{aligned}
$$

Alors, on a

$$\eta_{14}+\eta_{41}+\eta_{24}+\eta_{42}+\eta_{34}+\eta_{43}+\eta_{44}=0.$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 2.10. *L'espace des p-cocycles est défini par*

$$Z^p(\mathcal{N},\mathcal{N}) = \{\varphi\in C^p(\mathcal{N},\mathcal{N}) : \delta^p\varphi = 0\},$$

et l'espace des p-cobords est défini par

$$B^p(\mathcal{N},\mathcal{N}) = \{\psi=\delta^{p-1}\varphi : \varphi\in C^{p-1}(\mathcal{N},\mathcal{N})\}.$$

Lemme 2.6. $B^p(\mathcal{N},\mathcal{N})\subset Z^p(\mathcal{N},\mathcal{N})$.

Définition 2.11. *On appelle p-groupe de cohomologie le quotient*

$$H^p(\mathcal{N},\mathcal{N}) = \frac{Z^p(\mathcal{N},\mathcal{N})}{B^p(\mathcal{N},\mathcal{N})}.$$

2.4 Cohomologie des algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires multiplicatives induite par La cohomologie des algèbres Hom-Leibniz

Dans cette section, nous étendons aux algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires multiplicatives la construction de Takhtajan d'une cohomologie des algèbres Nambu-Lie ternaires à partir de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie binaires, (voir [21, 58, 59]).

La cohomologie des algèbres Hom-Lie multiplicatives a été introduite dans [2] et de façon indépendante dans [57].

La cohomologie d'une algèbre de Leibniz a été définie par Loday et Pirashvili dans [46]. On étend cette cohomologie à l'algèbre Hom-Leibniz comme suit.

Définition 2.12. *Soit $(A, [\cdot,\cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Leibniz et $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(A, A)$ l'ensembles des cochaines $\mathcal{C}^p_{\mathcal{L}}(A, A) = Hom(\otimes^p A, A)$ pour $p \geq 1$ et $\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}(A, A) = A$. On définit l'opérateur cobord d par $d\varphi(a) = -[\varphi, a]$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}(A, A)$ et pour $p \geq 1$, $\varphi \in \mathcal{C}^p_{\mathcal{L}}(A, A)$, $a_1, \cdots, a_{p+1} \in A$*

$$
\begin{aligned}
& d^p\varphi(a_1, \cdots, a_{p+1}) \qquad (2.4.1)\\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\left[\alpha^{p-1}(a_k), \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, a_{p+1})\right]\\
&+ (-1)^{p+1}\left[\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p), \alpha^{p-1}(a_{p+1})\right]\\
&+ \sum_{1 \leq k < j}^{p+1} (-1)^k \varphi(\alpha(a_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{a_k} \otimes \cdots \otimes \alpha(a_{j-1}) \otimes [a_k, a_j] \otimes \alpha(a_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha(a_{p+1}))
\end{aligned}
$$

Remarque 2.3. *Notons qu'on trouve le cas classique lorsque $\alpha = id$. La preuve que cela défini un complexe de cohomologie est similaire au cas des algèbres Hom-Lie, voir [2].*

Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative et le triplet $(\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^{\otimes n-1}, [\cdot,\cdot]_\alpha, \alpha)$ correspond à l'algèbre Hom-Leibniz associé à $\mathcal{N}$ où le crochet est défini dans (2.1.3).

Théorème 2.7. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire multiplicative et $\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = Hom(\otimes^p \mathcal{L}(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{N}, \mathcal{N})$, pour $p \geq 1$, l'espace des cochaines. Soit Δ : $\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \to \mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ une application linéaire définie pour $p = 0$ par*

$$\Delta\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_1 \otimes \cdots \otimes \varphi(x_i) \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \qquad (2.4.2)$$

et pour $p > 0$ par

$$(\Delta\varphi)(a_1, \cdots, a_{p+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{p-1}(x^1_{p+1}) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, a_{n-1} \otimes x^i_{p+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha^{n-1}(x^{n-1}_{p+1}), \tag{2.4.3}$$

où on a posé $a_j = x^1_j \otimes \cdots \otimes x^{n-1}_j$.

Alors il existe un complexe de cohomologie $(\mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N}), \delta)$ des algèbres Hom-Nambu-Lie n-aires multiplicatives telle que

$$d \circ \Delta = \Delta \circ \delta.$$

L'opérateur cobord $\delta : \mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N}) \to \mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ est défini pour $\varphi \in \mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ par

$$\begin{aligned}
\delta\varphi(a_1, ..., a_p, a_{p+1}, x) &= \sum_{1\le i\le j}^{p+1} (-1)^i \varphi\big(\alpha(a_1), ..., \widehat{\alpha(a_i)}, ..., \alpha(a_{j-1}), [a_i, a_j]_\alpha, ..., \alpha(a_{p+1}), \alpha(x)\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \varphi\big(\alpha(a_1), ..., \widehat{\alpha(a_i)}, ..., \alpha(a_{p+1}), L(a_i).x\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} L(\alpha^p(a_i)) \cdot \varphi\big(a_1, ..., \widehat{a_i}, ..., a_{p+1}, x\big) \\
&+ (-1)^p \big(\varphi(a_1, ..., a_p, \ ) \cdot a_{p+1}\big) \bullet_\alpha \alpha^p(x),
\end{aligned}$$

où

$$\big(\varphi(a_1, ..., a_p, \ ) \cdot a_{p+1}\big) \bullet_\alpha \alpha^p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [\alpha^p(x^1_{p+1}), ..., \varphi(a_1, ..., a_p, x^i_{p+1}), ..., \alpha^p(x^{n-1}_{p+1}), \alpha^p(x)].$$

pour $a_i \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, $x \in \mathcal{N}$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ et $(a_1 \cdots a_{p+1}) \in \mathcal{L}$ où $a_j = x^j_1 \otimes \cdots \otimes x^j_{n-1}$.
Alors $\Delta\varphi \in \mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ et selon (2.4.1) on prend $d = d_1 + d_2 + d_3$, où

$$d_1\varphi(a_1, \cdots, a_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \big[\alpha^{p-1}(a_k), \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, a_{p+1})\big]$$

$$d_2\varphi(a_1, \cdots, a_{p+1}) = (-1)^{p+1} \big[\varphi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p), \alpha^{p-1}(a_{p+1})\big]$$

$$d_3\varphi(a_1, \cdots, a_{p+1}) = \sum_{1\le k<j}^{p+1} (-1)^k \varphi(\alpha(a_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{a_k} \otimes \cdots \otimes \alpha(a_{j-1}) \otimes [a_k, a_j] \otimes \alpha(a_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha(a_{p+1}))$$

D'après (2.4.3) on a

$$
\begin{aligned}
&d_1 \circ \Delta\varphi(a_1, \cdots, a_{p+1})\\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \big[\alpha^{p-1}(a_k), \Delta\varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, a_{p+1})\big]\\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{n-1} \big[\alpha^{p-1}(a_k), \alpha^{p-1}(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i) \otimes \cdots \otimes \alpha^{p-1}(x_{p+1}^{n-1})\big]\\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{i>j}^{n-1} \alpha^p(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j)\\
&\otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i) \otimes \cdots \otimes \alpha^p(x_{p+1}^{n-1})\\
&+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{j>i}^{n-1} \alpha^p(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i)\\
&\otimes \cdots \otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j) \otimes \cdots \otimes \alpha^p(x_{p+1}^{n-1})\\
&+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^p(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i) \otimes \cdots \otimes \alpha^p(x_{p+1}^{n-1})\\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{i>j}^{n-1} \alpha^p(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j)\\
&\otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i) \otimes \cdots \otimes \alpha^p(x_{p+1}^{n-1})\\
&+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{j>i}^{n-1} \alpha^p(x_{p+1}^1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_1, \cdots, \widehat{a_k}, \cdots, x_{p+1}^i)\\
&\otimes \cdots \otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j) \otimes \cdots \otimes \alpha^p(x_{p+1}^{n-1})\\
&+ \Delta \circ \delta_3 \circ \varphi(a_1, \cdots, a_{p+1})\\
&= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Delta \circ \delta_3 \circ \varphi(a_1, \cdots, a_{p+1})
\end{aligned}
$$

où

$$\Lambda_1 = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\sum_{i>j}^{n-1}\alpha^p(x_{p+1}^1)\otimes\cdots\otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j)$$
$$\otimes\cdots\otimes\varphi(a_1,\cdots,\widehat{a_k},\cdots,x_{p+1}^i)\otimes\cdots\otimes\alpha^p(x_{p+1}^{n-1})$$
$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\sum_{j>i}^{n-1}\alpha^p(x_{p+1}^1)\otimes\cdots\otimes\varphi(a_1,\cdots,\widehat{a_k},\cdots,x_{p+1}^i)$$
$$\otimes\cdots\otimes L(\alpha^{p-1}(x_k)).\alpha^{p-1}(x_{p+1}^j)\otimes\cdots\otimes\alpha^p(x_{p+1}^{n-1})$$

De même, nous pouvons prouver que

$$d_2\circ\Delta\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1}) \ = \Delta\circ\delta_4\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1})$$

et

$$\begin{aligned}
&d_3\Delta\circ\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1})\\
&=\sum_{1\leq k<j}^{p}(-1)^k\Delta\circ\varphi(\alpha(a_1)\otimes\cdots\otimes\widehat{a_k}\otimes\cdots\otimes\alpha(a_{j-1})\otimes[a_k,a_j]\otimes\alpha(a_{j+1})\otimes\cdots\otimes\alpha(a_{p+1}))\\
&+\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^k\varphi(\alpha(a_1)\otimes\cdots\otimes\widehat{a_k}\otimes\cdots\otimes\alpha(a_p)\otimes[a_k,a_{p+1}])\\
&=\Delta\circ\delta_1\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1})+\Delta\circ\delta_2\varphi(a_1,\cdots,a_{p+1})+\Lambda_1'+\Lambda_2',
\end{aligned}$$

où $\Lambda_1'=-\Lambda_1$ et $\Lambda_2'=-\Lambda_2$.

Finalement on a

$$d\circ\Delta=d_1\circ\Delta+d_2\circ\Delta+d_3\circ\Delta=\Delta\circ\delta_3+\Delta\circ\delta_4+\Delta\circ\delta_1+\Delta\circ\delta_2=\Delta\circ\delta$$

où $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4$ comme defini dans la démonstration 2.5. □

Remarque 2.4. *Si $d^2=0$, alors $\delta^2=0$.*
En effet, Puisque $d\circ\Delta=\Delta\circ\delta$, alors

$$\Delta\circ\delta^2=\Delta\circ\delta\circ\delta=d\circ\Delta\circ\delta=d\circ.d\circ\Delta=d^2\circ\Delta=0.$$

Nous considérons maintenant le cas particulier des algèbres Hom-Nambu ternaires et montrons comment déduire la cohomologie des algèbres Hom-Nambu ternaires.

Soit$(\mathcal{N},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire multiplicative. D'après la Proposition 2.2 le triplet $(\mathcal{L}(\mathcal{N})=\mathcal{N}\otimes\mathcal{N},[\cdot,\cdot]_\alpha,\alpha)$ où le crochet est défini pour $x=x_1\otimes x_2$ et $y=y_1\otimes y_2$ par

$$[x,y]=[x_1,x_2,y_1]\otimes\alpha(y_2)+\alpha(y_1)\otimes[x_1,x_2,y_2], \tag{2.4.4}$$

est une algèbre Hom-Leibniz.

On obtient le corollaire du Théorème 2.7 suivant.

Corollaire 2.8. *Soit $(\mathcal{N},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire multiplicative et $\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})=Hom(\otimes^{2p+1}\mathcal{N},\mathcal{N})$ pour $p\geq 1$ les cochaines. Soit $\Delta:\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})\to\mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L},\mathcal{L})$ une application linéaire définie pour $p=0$ par*

$$\Delta\varphi(x_1\otimes x_2)=x_1\otimes\varphi(x_2)+\varphi(x_1)\otimes x_2$$

et pour $p>0$ par

$$(\Delta\varphi)(a_1,\cdots,a_{p+1})=\alpha^{p-1}(x_{2p+1})\otimes\varphi(a_1,\cdots,a_p\otimes x_{2p+2})+\varphi(a_1,\cdots,a_p\otimes x_{2p+1})\otimes\alpha^{p-1}(x_{2p+2}),$$

où on a posé $a_j=x_{2j-1}\otimes x_{2j}$. Alors il existe un complexe de cohomologie $(\mathcal{C}^\bullet_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N}),\delta)$ pour une algèbre Hom-Nambu-Lie ternaire multiplicative telle que

$$d\circ\Delta=\Delta\circ\delta.$$

L'opérateur cobord $\delta:\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})\to\mathcal{C}^{p+1}_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ est défini pour $\varphi\in\mathcal{C}^p_{\mathcal{N}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$ par

$$\begin{aligned}\delta\varphi(x_1\otimes\cdots\otimes x_{2p+1})=&\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=2j+1}^{2p+1}(-1)^j\varphi(\alpha(x_1)\otimes\cdots\otimes[x_{2j-1},x_{2j},x_k]\otimes\cdots\otimes\alpha(x_{2p+1}))+\\ &\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}[\alpha^{p-1}(x_{2k-1}),\alpha^{p-1}(x_{2k}),\varphi(x_1\otimes\cdots\otimes\widehat{x_{2k-1}}\otimes\widehat{x_{2k}}\otimes\cdots\otimes x_{2p+1})]+\\ &(-1)^{n+1}[\alpha^{p-1}(x_{2p-1}),\varphi(x_1\otimes\cdots\otimes x_{2p-2}\otimes x_{2p}),\alpha^{p-1}(x_{2p+1})]+\\ &(-1)^{p+1}[\varphi(x_1\otimes\cdots\otimes x_{2p-1}),\alpha^{p-1}(x_{2p}),\alpha^{p-1}(x_{2p+1})].\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Chapitre 3

Algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques

3.1 Définitions et exemples

Une classe importante des algèbres Nambu-Lie, en raison de leur apparition dans un certain nombre de contextes physiques, sont celles qui possèdent un produit scalaire (ici, une forme bilinéaire symétrique nondégénérée) qui est invariant par la dérivation.

Dans cette section, nous introduisons une classe d'algèbres Hom-Nambu-Lie qui possède un produit scalaire.

Définition 3.1. *Soit* $(\mathcal{N}, [., ..., .], \widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire et* $B : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée telle que, pour tout* y, $z \in \mathcal{N}$ *et* $x \in \wedge^{n-1}\mathcal{N}$

$$B([x_1, \cdots, x_{n-1}, y], z) + B(y, [x_1, \cdots, x_{n-1}, z]) = 0, \tag{3.1.1}$$

$$B(\alpha_i(y), z) = B(y, \alpha_i(z)), \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}. \tag{3.1.2}$$

Le quadruplet $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha}, B)$ *est appelé algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique.*

Remarque 3.1. *Si* $\alpha_i = Id$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n-1\}$*, on retrouve les algèbres Nambu n-aires quadratiques.*

Définition 3.2. *Une algèbre Hom-Nambu n-aire* $(\mathcal{N}, [., ..., .], \widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ *est appelée* Hom-quadratique *s'il existe un couple* (B, β) *où* $B : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{K}$ *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et* $\beta : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *une application linéaire vérifiant*

$$B([x_1, \cdots, x_{n-1}, y], \beta(z)) + B(\beta(y), [x_1, \cdots, x_{n-1}, z]) = 0. \tag{3.1.3}$$

On appelle l'identité (3.1.3) *la* β*-invariance de* B.

Nous récupérons les algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques lorsque $\beta = id$ *et l'identité* (3.1.1) *est appelé l'invariance de* B*. L'algèbre* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha}, B, \beta)$ *est appelée algèbre Hom-Nambu n-aire Hom-quadratique.*

Exemple 3.1. *Nous considérons un exemple d'algèbre Hom-Nambu ternaire donné dans [63]. Soit* V *un* $\mathbb{K}$*-module et* $B : V^{\otimes 2} \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Supposons que* $\alpha : V \to V$ *est une involution, c'est-à-dire* $\alpha^2 = id$*. Supposons que* α *est* B*-symétrique, c'est-à-dire* $B(\alpha(x), y) = B(x, \alpha(y))$ *pour tous* $x, y \in V$*. Nous avons également*

$$B(\alpha(x), \alpha(y)) = B(\alpha^2(x), y) = B(x, y).$$

Alors, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$*, le produit triple*

$$[x, y, z]_\alpha = \lambda(B(y, z)\alpha(x) - B(z, x)\alpha(y)) \qquad \textit{pour tous } x,\ y,\ z \in V. \tag{3.1.4}$$

donne une algèbre Hom-Nambu Hom-quadratique ternaire $(V, [., ., .]_\alpha, (\alpha, \alpha), B, \alpha)$*. En effet, pour* $x\ , y, z, t \in V$

$$\begin{aligned}
B([x, y, z]_\alpha, \alpha(t)) &= \lambda(B(B(y, z)\alpha(x) - B(z, x)\alpha(y), \alpha(t))) \\
&= \lambda(B(y, z)B(\alpha(x), \alpha(t)) - B(z, x)B(\alpha(y), \alpha(t))) \\
&= \lambda(B(y, z)B(x, t) - B(z, x)B(y, t)) \\
&= \lambda(B(\alpha(y), \alpha(z))B(x, t) - B(\alpha(z), \alpha(x))B(y, t)) \\
&= \lambda(B(\alpha(z), \alpha(y))B(x, t) - B(\alpha(z), \alpha(x))B(y, t)) \\
&= \lambda(B(\alpha(z), \alpha(y)B(x, t) - \alpha(x)By, t))) \\
&= -\lambda(B(\alpha(z), \alpha(x)B(y, t) - \alpha(y)B(t, x))) \\
&= -B(\alpha(z), [x, y, t]_\alpha).
\end{aligned}$$

Exemple 3.2. *Dans [12], les auteurs ont fourni une liste d'algèbres ternaires de type Hom-Nambu-Lie de dimension* 3 *correspondant à homomorphismes diagonaux. Dans ce qui suit, nous donnons une classification des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaires quadratiques de dimension* 3.

Proposition 3.1. *Toute algèbre de Hom-Nambu-Lie quadratique ternaire de dimension* 3 *avec un homomorphisme diagonal est isomorphe à l'une des algèbres Hom-Nambu-Lie ternaire quadratique suivante* $(V, [\cdot,\cdot,\cdot], (\alpha,\beta), B)$*, relativement à la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* V *et l'antisymétrie, par*

$$[e_1, e_2, e_3] = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3,$$
$$\alpha(x) = \lambda x,\ \ \beta(x) = \mu x,\ \ \forall x \in V,$$
$$m_{i,j} = m_{j,i},$$
$$c_1m_{1,1} = -c_2m_{1,2} - c_3m_{1,3},$$
$$c_2m_{2,2} = -c_2m_{1,2} - c_3m_{2,3},$$
$$c_3m_{3,3} = -c_1m_{1,3} - c_2m_{2,3},$$

où $m_{i,j} = B(e_i, e_j)$ $1 \leq i, j \leq 3$ *et* $\{c_i, m_{i,j}, \lambda, \mu\}_{1\leq i,j\leq 3}$ *sont des paramètres.*

3.2 Théorie des représentations et algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques

Dans cette section nous établissons un lien entre les algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques et la théorie des représentations en se basant sur le Corollaire 1.19. Les résultats obtenus dans cette section généralisent ceux donnés pour le cas binaire dans [16].

Proposition 3.2. *Soit* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha})$ *une algèbre Hom-Nambu n-aire. S'il existe* B : $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *une forme bilinéaire telle que le quadruplet* $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], \widetilde{\alpha}, B)$ *est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique alors*

1. $(\mathcal{N}^*, \widetilde{L}, \alpha^*_{n-1})$ *défini dans le Corollaire 1.19 est une représentation.*
2. *La représentation adjointe* $(\mathcal{N}, L, \alpha_{n-1})$ *et la représentation coadjointe* $(\mathcal{N}^*, \widetilde{L}, \alpha^*_{n-1})$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Pour prouver la première assertion, nous devons montrer que pour tout $z \in \mathcal{N}$, on a

$$L(x) \circ L(\tilde{\alpha}(y)) \cdot z - L(y) \circ L(\tilde{\alpha}(x)) \cdot z = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-1} \circ L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z) \tag{3.2.1}$$

Soit $u \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
&B(L(x) \circ L(\tilde{\alpha}(y)) \cdot z - L(y) \circ L(\tilde{\alpha}(x)) \cdot z, u)\\
&= B(L(x) \circ L(\tilde{\alpha}(y)) \cdot z, u) - (L(y) \circ L(\tilde{\alpha}(x)) \cdot z, u)\\
&= B(L(\tilde{\alpha}(y)) \cdot z, L(x) \cdot u) - (L(\tilde{\alpha}(x)) \cdot z, L(y) \cdot u)\\
&= B(z, L(\tilde{\alpha}(y)) \circ L(x) \cdot u) - (z, L(\tilde{\alpha}(x)) \circ L(y) \cdot u)\\
&= B(z, L(\tilde{\alpha}(y)) \circ L(x)(u) - L(\tilde{\alpha}(x)) \circ L(y)(u))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&B(\alpha_{n-1} \circ L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z), u)\\
&B(\alpha_{n-1} \circ L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z), u)\\
&= B(L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z), \alpha_{n-1}(u))\\
&= B(z, L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \circ \alpha_{n-1}(u))\\
&= B(z, L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \circ \alpha_{n-1}(u))
\end{aligned}$$

Puisque B est bilinéaire, alors

$$\begin{aligned}
&B(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-1} \circ L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z), u)\\
&= B(z, \sum_{i=1}^{n-1} L(\alpha_1(x_1), ..., L(y) \cdot x_i, ..., \alpha_{n-2}(x_{n-1})) \circ \alpha_{n-1}(u))
\end{aligned}$$

Donc

$$B(L(x)\circ L(\tilde{\alpha}(y))\cdot z - L(y)\circ L(\tilde{\alpha}(x))\cdot z - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{n-1}\circ L(\alpha_1(x_1),...,L(y)\cdot x_i,...,\alpha_{n-2}(x_{n-1}))(z),u)$$

$$= B(z, L(\tilde{\alpha}(y))\circ L(x)\cdot u - L(\tilde{\alpha}(x))\circ L(y)\cdot u - \sum_{i=1}^{n-1} L(\alpha_1(x_1),...,L(y)\cdot x_i,...,\alpha_{n-2}(x_{n-1}))\circ\alpha_{n-1}(u))$$

$$= 0$$

Puisque B est non dégénérée alors on a l'identité (3.2.1). Pour la seconde assertion, nous considérons l'application $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^*$ définie par $x \mapsto B(x,\cdot)$, qui est bijective puisque B est nondégénérée et aussi un morphisme. $\square$

3.3 Construction d'algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques

Dans la suite nous montrons certaines constructions d'algèbres Hom-Nambu n-aires Hom-quadratiques $(\mathcal{N}, \gamma\circ[\cdot,...,\cdot], \gamma\circ\tilde{\alpha}, B, \gamma)$, à partir d'algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques $(\mathcal{N}, [\cdot,...,\cdot], \widetilde{\alpha}, B)$, où γ est un automorphisme de $\mathcal{N}$ et B-symétrique, et d'algèbres Hom-Nambu n-aires $(A\otimes\mathcal{N}, [\cdot,...,\cdot], \zeta)$ par le produit tensoriel d'algèbres totalement Hom-associtatives n-aires symétriques Hom-quadratiques $(A, \mu, \widetilde{\eta}, \beta_A, B_A)$ et d'algèbres Hom-Nambu n-aires Hom-quadratiques $(\mathcal{N}, [\cdot,...,\cdot]_{\mathcal{N}}, \widetilde{\alpha}, \beta_{\mathcal{N}}, B_{\mathcal{N}})$.

Notons l'espace des automorphismes B-symétriques de $\mathcal{N}$ (i.e. $B(\gamma(x),y) = B(x,\gamma(y))$) par $Aut_S(\mathcal{N}, B)$.

Proposition 3.3. *Soit $(\mathcal{N}, [.,...,.], \widetilde{\alpha}, B)$ une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique et $\gamma \in Aut_S(\mathcal{N}, B)$. Alors $(\mathcal{N}, \gamma\circ[.,...,.], \gamma\circ\tilde{\alpha}, B, \gamma)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire Hom-quadratique et $(\mathcal{N}, \gamma\circ[.,...,.], \gamma\circ\tilde{\alpha}, B_\gamma)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique, où*

$$B_\gamma(x,y) = B(\gamma(x),y) \tag{3.3.1}$$

Démonstration. Puisque γ et α_i sont B-symétriques et γ est un automorphisme de $\mathcal{N}$ alors $\gamma\circ\alpha_i$ est B-symétrique pour tout $i \in \{1,...,n-1\}$, en effet pour $x,\ y \in \mathcal{N}$

$$B(\gamma\circ\alpha_i(x),y) = B(\alpha_i(x),\gamma(y)) = B(x,\alpha\circ\gamma(y)) = B(x,\gamma\circ\alpha(y)).$$

Soit $x=(x_1,...,x_{n-1})\in\mathcal{N}^{\otimes n-1},\ y_1,\ y_2\in\mathcal{N}$ et $i\in\{1,...,n-1\}$

$$\begin{aligned}B(\gamma\circ[x_1,...,x_{n-1},y_1],\gamma\circ\alpha_i(y_2)) &= B([\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(y_1)],\alpha_i\circ\gamma(y_2))\\ &= -B(\alpha_i\circ\gamma(y_1),[\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(y_2)])\\ &= -B(\gamma\circ\alpha_i(y_1),\gamma\circ[x_1,...,x_{n-1},y_2])\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}B_\gamma(\gamma\circ[x_1,...,x_{n-1},y_1],y_2) &= B(\gamma\circ[\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(y_1)],y_2)\\ &= B([\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(y_1)],\gamma(y_2))\\ &= -B(\gamma(y_1),[\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(y_2)])\\ &= -B(\gamma(y_1),\gamma\circ[x_1,...,x_{n-1},y_2])\\ &= -B_\gamma(y_1,\gamma\circ[x_1,...,x_{n-1},y_2])\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4. *Soit $(\mathcal{N},[.,...,.],\alpha,B)$ une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique multiplicative, alors $(\mathcal{N},\alpha^n\circ[.,...,.],\alpha^{n+1},B)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique multiplicative.*

Maintenant on discute le produit tensoriel comme dans la proposition 1.2.

Théorème 3.5. *Soit $(A,\mu,\widetilde{\eta}=(\eta_1,...,\eta_{n-1}),B_A)$ une algèbre totalement Hom-associative n-aire et symétrique et $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot]_\mathcal{N},\widetilde{\alpha},B_\mathcal{N})$ une algèbre Hom-Nambu n-aire. Alors l'algèbre Hom-Nambu n-aire $(A\otimes\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\widetilde{\zeta}=(\zeta_1,...,\zeta_{n-1}))$ définie dans le théorème 1.2 munie du couple $(\widetilde{B},\omega)$ donné par*

$$\widetilde{B}(a\otimes x,b\otimes y)=B_A(a,b)B_\mathcal{N}(x,y), \tag{3.3.2}$$

$$\omega(a\otimes x)=\beta_A(a)\otimes\beta_\mathcal{N}(x). \tag{3.3.3}$$

est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique.

Proposition 3.6. *Soit $(\mathcal{N},[\cdot,...,\cdot],\alpha,B)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie multiplicative Hom-quadratique, α-invariante et soit $\big(\mathcal{L}(\mathcal{N}),\ [\ ,\ ]_\alpha,\ \tilde{\alpha}\big)$ son algèbre Hom-Leibniz associée.*

Alors la forme bilinéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{N})$, $\widehat{B}$ définie par

$$\widehat{B}(x,y) = B(x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}, y_1 \wedge ... \wedge y_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} B(x_i, y_i) \tag{3.3.4}$$

est $\tilde{\alpha}$-invariante, i.e. pour tout $x,\ y,\ z \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$:

$$\widehat{B}([z,x]_\alpha, \tilde{\alpha}(y)) + \widehat{B}(\tilde{\alpha}(x), [z,x]_\alpha) = 0. \tag{3.3.5}$$

Démonstration. Soit $x = (x_1, ..., x_{n-1}),\ y = (y_1, ..., y_{n-1})$ et $z \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$. Alors d'après (3.3.5) on a

$$\begin{aligned}
\widehat{B}([z,x]_\alpha, \hat{\alpha}(y)) &= \widehat{B}(L(z) \bullet_\alpha x, \hat{\alpha}(y)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{B}\big(\big(\alpha(x_1), ..., L(z)\cdot x_i, ..., \alpha(x_{n-1})\big), \big(\alpha(y_1), ..., \alpha(y_{n-1})\big)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B(L(z)\cdot x_i, \alpha(y_i)) \prod_{j=0\ j\neq i}^{n-1} B(\alpha(x_j), \alpha(x_j)) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} B(\alpha(x_i), L(z)\cdot y_i) \prod_{j=0\ j\neq i}^{n-1} B(\alpha(x_j), \alpha(y_j)) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} \widehat{B}\big(\big(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_{n-1})\big), \big(\alpha(y_1), ..., L(z)\cdot y_i, ..., \alpha(y_{n-1})\big)\big) \\
&= -\widehat{B}(\hat{\alpha}(x), L(z) \bullet_\alpha y) \\
&= -\widehat{B}(\hat{\alpha}(x), [z,y]_\alpha).
\end{aligned}$$

□

3.4 Algèbre Hom-Nambu-Lie Hom-quadratique $(n+1)$-aire induite par une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire Hom-quadratique

Dans ce qui suit, nous rappelons la procédure donnée dans [9] pour induire une algèbre Hom-Nambu-Lie $(n+1)$-aire d'une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire, qu'on adaptera aux structures quadratiques.

Définition 3.3. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\phi : V^n \to V$ une application n-linéaire et $\tau : V \to \mathbb{K}$ une application linéaire. On définit $\phi_\tau : V^{n+1} \to V$ par*

$$\phi_\tau(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \tau(x_k)\phi(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n+1}), \tag{3.4.1}$$

où $\widehat{x_k}$ désigne que x_k est omis.

Définition 3.4. *Pour toute application $\phi : V^n \to V$, on appelle une application linéaire $\tau : V \to \mathbb{K}$ une ϕ-trace si $\tau(\phi(x_1, ..., x_n)) = 0$ pour tout $x_1, ..., x_n \in V$.*

Lemme 3.7. *Soit $\phi : V^n \to V$ une application n-linéaire antisymétrique et $\tau : V \to \mathbb{K}$ une application linéaire. Alors ϕ_τ est une application $(n+1)$-linéaire antisymétrique. De plus, si τ est une ϕ-trace alors τ est une ϕ_τ-trace.*

Théorème 3.8 ([9]). *Soient $(V, \phi, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire, τ une ϕ-trace et une application linéaire $\alpha_n : V \to V$. Si elle satisfait*

$$\tau(\alpha_i(x))\tau(y) = \tau(x)\tau(\alpha_i(y)), \tag{3.4.2}$$

$$\tau(\alpha_i(x))\alpha_j(y) = \alpha_j(x)\tau(\alpha_i(y)), \tag{3.4.3}$$

pour tout $i,\ j \in \{1, ..., n\}$ et tous $x,\ y \in V$, alors $(V, \phi_\tau, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ est une algèbre Hom-Nambu-Lie $(n+1)$-aire, Nous disons que $(V, \phi_\tau, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ est induite à partir de $(V, \phi, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$.

On obtient le résultat suivant en considérant des structures quadratiques.

Théorème 3.9. *Soient $(V, \phi, (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}), B, \beta)$ une algèbre Hom-Nambu-Lie n-aire Hom-quadratique, τ une ϕ-trace et une application linéaire $\alpha_n : V \to V$ B-symétrique tels que*

$$\tau(x)B(\beta(y), z) + \tau(y)B(\beta(x), z) = 0, \text{ pour tout } x,\ y \in V. \tag{3.4.4}$$

Alors $(V, \phi_\tau, (\alpha_1, ..., \alpha_n), B, \beta)$ est une algèbre Hom-Nambu-Lie $(n+1)$-aire Hom- quadratique.

Démonstration. Soit $x_1, ..., x_n, y_1, y_2 \in V$

$$\begin{aligned} B([x_1, ..., x_n, y_1]_\tau, \beta(y_2)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \tau(x_k) B([x_1 ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, y_1], \beta(y_2)) \\ &+ (-1)^{n+1}\tau(y_1) B([x_1, ..., x_n], \beta(y_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\beta(y_1), [x_1, ..., x_n, y_2]_\tau) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \tau(x_k) B(\beta(y_1), [x_1 ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, y_2]) \\ &+ (-1)^{n+1}\tau(y_2) B(\beta(y_1), [x_1, , ..., x_n]). \end{aligned}$$

Puisque B est symétrique, alors

$$B([x_1, ..., x_n, y_1]_\tau, \beta(y_2)) + B(\beta(y_1), [x_1, ..., x_n, y_2]_\tau) = 0.$$

□

3.5 T*-extension d'algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques

Nous donnons dans cette section une construction d'une algèbre Hom-Nambu $\mathcal{L}$ qui généralise la T^*-extension introduite dans [17].

Théorème 3.10. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_\mathcal{N}, B)$ une algèbre Nambu-Lie n-aire quadratique et $\mathcal{N}^*$ l'espace vectoriel dual. L'espace vectoriel $\mathcal{L} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^*$ équipé par le crochet suivant $[\cdot, ..., \cdot]_\mathcal{L} : \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}$ donné par, pour $u_i = x_i + f_i \in \mathcal{L}$ où $i \in \{1, ..., n\}$*

$$[u_1, ..., u_n]_\mathcal{L} = [x_1, ..., x_n]_\mathcal{N} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n+1} f_i \circ L(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n), \tag{3.5.1}$$

et la forme bilinéaire

$$B_\mathcal{L} : \begin{array}{c} \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \\ B_\mathcal{L}(x + f, y + g) = B(x, y) + f(y) + g(x) \end{array} \tag{3.5.2}$$

est une algèbre Nambu n-aire quadratique.

Démonstration.

$\star$) Soit $u_i = x_i + f_i \in \mathcal{L}$ et $v_i = y_k + g_k \in \mathcal{L}$, vérifions l'identité de Nambu sur $\mathcal{L}$ donnée par

$$[u_1, ..., u_{n-1}, [v_1, ..., v_n]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+n} [v_1, ..., \widehat{v_l}, ..., v_n, [u_1, ..., u_{n-1}, v_l]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}} \qquad (3.5.3)$$

Commençant tout d'abord par $[u_1, ..., u_{n-1}, [v_1, ..., v_n]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}}$.

$$[u_1, ..., u_{n-1}, [v_1, ..., v_n]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}}$$
$$= [x_1, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} f_i \circ L(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}})$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} g_i \circ L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n) \circ L(x_1, ..., x_{n-1}).$$

Le terme de droite de (3.5.3) donne, pour tout $l \in \{1, ..., n\}$

$$[v_1, ..., \widehat{v_l}, ..., v_n, [u_1, ..., u_{n-1}, v_l]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}} = [y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n, [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} f_i \circ L(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{n-1}, y_l) \circ L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n+1} g_i \circ L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n, [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]_{\mathcal{N}})$$
$$+ g_l \circ L(x_1, ..., x_{n-1}) \circ L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n).$$

$\star$) D'après l'identité Nambu sur $\mathcal{N}$, on a

$$[x_1, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n, z]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}} = \sum_{i=1, i\neq l}^{n} (-1)^{i+n} [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., \widehat{y_l}, ..., y_{n-1}, [x_1, ..., x_{n-1}, y_i]_{\mathcal{N}}, z]_{\mathcal{N}}$$
$$+ [y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_{n-1}, [x_1, ..., x_{n-1}, z]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}.$$

qui est équivalente à

$$L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n) \circ L(x_1, ..., x_{n-1})$$
$$= L(x_1, ..., x_{n-1}) \circ L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n, [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]).$$

Donc pour tout $l \in \{1, ...n\}$

$$g_l \circ L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n) \circ L(x_1, ..., x_{n-1}) - g_l \circ L(x_1, ..., x_{n-1}) \circ L(y_1, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} g_l \circ L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., \widehat{y_l}, ..., y_n, [x_1, ..., x_{n-1}, y_l]).$$

$\star$) D'autre part pour la démontrer, pour $k \in \{1, ...n\}$

$$- f_k \circ L(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} f_k \circ L(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, y_i) \circ L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n).$$

D'après l'identité de Nambu (3.5.3) sur $\mathcal{N}$ et l'invariance de B, on a

$$B([x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}, z) = B(x_n, [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}, z]_{\mathcal{N}}).$$

D'où

$$B(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, y_i]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}, z)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} B([y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, y_i]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}, z)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} B([x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_n, y_i]_{\mathcal{N}}, [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, z]_{\mathcal{N}})$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} B(x_n, [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, y_i, [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, z]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}})$$
$$= -B(x_n, \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, y_i, [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, z]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}).$$

Puisque B est nondégénérée, alors

$$- [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}, z]_{\mathcal{N}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} [x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, y_i, [y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n, z]_{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}}.$$

qui équivalent à

$$-L(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]_{\mathcal{N}}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} L(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n-1}, y_i)\circ L(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n).$$

Finalement, l'dentité de Nambu est satisfaite. Donc $(\mathcal{L}, [\cdot, ..., \cdot]_{\mathcal{L}})$ est une algèbre de Nambu n-aire. $\square$

Théorème 3.11. *Soient $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot]_{\mathcal{N}}, B)$ une algèbre Nambu-Lie n-aire quadratique et $\alpha \in Aut_S(\mathcal{N}, B)$ est une involution. Alors $(\mathcal{L}, [\cdot, ..., \cdot]_{\Omega}, \widetilde{\Omega}, B_{\mathcal{L}}, \Omega)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire Hom-quadratique multiplicative, où*

$$\Omega : \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ \Omega(x + f) = \alpha(x) + f \circ \alpha$$

et

$$[\cdot, ..., \cdot]_{\Omega} = \Omega \circ [\cdot, ..., \cdot]_{\mathcal{L}}.$$

Démonstration. Soit $x_1, ..., x_n \in \mathcal{N}$ et $f_1, ..., f_n \in \mathcal{N}^*$,

$$\Omega[x_1 + f_1, ..., x_n + f_n]_{\mathcal{L}} = \alpha[x_1, ..., x_n]_{\mathcal{N}} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i \circ L(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \circ \alpha,$$

$$[\Omega(x_1 + f_1), ..., \Omega(x_n + f_n)]_{\mathcal{L}} = [\alpha(x_1), ..., \alpha(x_n)]_{\mathcal{N}} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_i \circ \alpha \circ L(\alpha(x_1), ..., \widehat{x_i}, ..., \alpha(x_n)).$$

C'est pour tous les $z \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
\alpha \circ L(\alpha(x_1), ..., \widehat{x_i}, ..., \alpha(x_n))(z) &= \alpha[\alpha(x_1), ..., \widehat{x_i}, ..., \alpha(x_n), z]_{\mathcal{N}} \\
&= [\alpha^2(x_1), ..., \widehat{x_i}, ..., \alpha(x_n)^2, \alpha(z)]_{\mathcal{N}} \\
&= [x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n, \alpha(z)]_{\mathcal{N}} \\
&= L(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n) \cdot \alpha(z).
\end{aligned}$$

Alors $\Omega[x_1 + f_1, ..., x_n + f_n]_{\mathcal{L}} = [\Omega(x_1 + f_1), ..., \Omega(x_n + f_n)]_{\mathcal{L}}$.
Dans ce qui suit, nous montrons que Ω est $B_{\mathcal{L}}$-symétrique. En effet, soit $x,\ y \in \mathcal{N}$ et

$f,\ h \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{L}}(\Omega(x+f), y+h) &= B_{\mathcal{L}}(\alpha(x) + f\circ\alpha, y+h) \\ &= B(\alpha(x), y) + f\circ\alpha(y) + h\circ\alpha(x) \\ &= B(x, \alpha(y)) + f\circ\alpha(y) + h\circ\alpha(x) \\ &= B_{\mathcal{L}}(x+f, \alpha(y) + h\circ\alpha) = B_{\mathcal{L}}(x+f, \Omega(y+h)) \end{aligned}$$

Donc, d'après la Proposition 3.3 $(\mathcal{L}, [\cdot, ..., \cdot]_\Omega, \widetilde{\Omega}, B_{\mathcal{L}}, \Omega)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire Hom-quadratique multiplicative. On a aussi $(\mathcal{L}, [\cdot, ..., \cdot]_\Omega, \Omega, B_{\mathcal{L},\Omega})$est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique multiplicative, où $B_{\mathcal{L},\Omega}(u.v) = B_{\mathcal{L}}(\Omega(u), v)$, pour tout $u, v \in \mathcal{L}$.

□

3.6 Algèbres ternaires de Nambu découlant de la construction de Faulkner

Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], B)$ est une algèbre de Lie quadratique de dimension finie et soit $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. on désigne par $\langle -, - \rangle$ le couple dual entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on définit un élément $\phi(x \otimes f) \in \mathfrak{g}$ par

$$B(y, \phi(x \otimes f)) = \langle [y, x], f \rangle = f([y, x]), \forall\ y \in \mathfrak{g}. \tag{3.6.1}$$

Puisque ϕ est linéaire, l'application $\mathfrak{g}$-équivariante $\phi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ est surjective. Nous allons écrire $\phi(x, f)$ pour $\phi(x \otimes f)$ dans la suite. La $\mathfrak{g}$-équivariance de ϕ équivaut à

$$[\phi(x, f), \phi(y, g)] = \phi([\phi(x, f), y], g) + \phi(y, \phi(x, f)\cdot g), \tag{3.6.2}$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ et $f, g \in \mathfrak{g}^*$, où $\phi(x, f)\cdot g$ est définie par

$$\langle y, \phi(x, f)\cdot g \rangle = -\langle [y, \phi(x, f)], g \rangle \forall\ y \in \mathfrak{g}. \tag{3.6.3}$$

Ces identités fondamentales suggèrent de définir un crochet sur $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ par

$$[x \otimes f, y \otimes g] = [\phi(x, f), y] \otimes g + y \otimes \phi(x, f)\cdot g. \tag{3.6.4}$$

Proposition 3.12. *[28] Le crochet* (3.6.4) *donne sur* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ *une structure d'algèbre de Leibniz.*

Proposition 3.13. *Soit* $\alpha \in Aut_S(B, \mathfrak{g})$ *une involution , alors* $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*, [.,.]_\Omega, \Omega, B_\Omega)$ *est une algèbre Hom-Leibniz quadratique multiplicative, où*

$$\Omega(x \otimes f) = \alpha(x) \otimes f \circ \alpha, \tag{3.6.5}$$

$$[x \otimes f, y \otimes g]_\Omega = \Omega \circ [x \otimes f, y \otimes g], \tag{3.6.6}$$

$$B_\Omega(x \otimes f, y \otimes g) = \langle \alpha(x), g \rangle \langle \alpha(y), f \rangle. \tag{3.6.7}$$

Démonstration. Soit $x, y \in \mathcal{N}$, $f, g \in \mathcal{N}^*$ et d'après (3.6.1) et (3.6.3) on a

$$\begin{aligned} B(y, \alpha(\phi(x \otimes f))) &= B(\alpha(y), \phi(x \otimes f)) \\ &= \langle [\alpha(y), x], f \rangle \\ &= \langle \alpha([y, \alpha(x)]), f \rangle \\ &= \langle [y, \alpha(x)], f \circ \alpha \rangle \\ &= B(y, \phi(\alpha(x) \otimes f \circ \alpha), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle y, (\phi(x, f) \cdot g) \circ \alpha \rangle &= \langle \alpha(y), \phi(x, f) \cdot g \rangle \\ &= -\langle [\alpha(y), \phi(x, f)], g \rangle \\ &= -\langle \alpha([y, \alpha(\phi(x, f))]), g \rangle \\ &= -\langle [y, \alpha(\phi(x, f))], g \circ \alpha \rangle \\ &= -\langle [y, \phi(\alpha(x), f \circ \alpha)], g \circ \alpha \rangle \\ &= \langle y, \phi(\alpha(x), f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha) \rangle \end{aligned}$$

donc, on obtient l'identité suivante

$$\begin{aligned} &\alpha(\phi(x \otimes f)) = \phi(\alpha(x) \otimes f \circ \alpha), \\ &(\phi(x, f) \cdot g) \circ \alpha = \phi(\alpha(x), f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\Omega([x\otimes f,y\otimes g]) &= \alpha([\phi(x,f),y])\otimes g\circ\alpha+\alpha(y)\otimes(\phi(x,f)\cdot g)\circ\alpha\\ &= [\alpha(\phi(x,f)),\alpha(y)]\otimes g\circ\alpha+\alpha(y)\otimes(\phi(x,f)\cdot g)\circ\alpha\\ &= [\phi(\alpha(x)\otimes f\circ\alpha),\alpha(y)]\otimes g\circ\alpha+\alpha(y)\otimes\phi(\alpha(x),f\circ\alpha)\cdot(g\circ\alpha)\\ &= [\alpha(x)\otimes f\circ\alpha,\alpha(y)\otimes g\circ\alpha]\\ &= [\Omega(x\otimes f),\Omega(y\otimes g)].\end{aligned}$$

Donc, $\Omega([x\otimes f,y\otimes g])=[\Omega(x\otimes f),\Omega(y\otimes g)]$, alors d'après Proposition 3.3 $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*,[.,.]_\Omega,\Omega)$ est une algèbre Hom-Leibniz multiplicative.

Maintenant, soit $x,y,z\in\mathcal{N},\ f,g,h\in\mathcal{N}^*$ et puisque α est une involution, alors

$$\begin{aligned}B_\Omega([x\otimes f,y\otimes g]_\Omega,z\otimes h) &= B_\Omega(\alpha([\phi(x,f),y])\otimes g\circ\alpha,z\otimes h)+B_\Omega(\alpha(y)\otimes(\phi(x,f)\cdot g)\circ\alpha,z\otimes h)\\ &= \langle[\phi(x,f),y],h\rangle\langle\alpha(z),g\circ\alpha\rangle+\langle y,h\rangle\langle\alpha(z),(\phi(x,f)\cdot g)\circ\alpha\rangle\\ &= \langle[\phi(x,f),y],h\rangle\langle z,g\rangle+\langle y,h\rangle\langle z,\phi(x,f)\cdot g\rangle\\ &= \langle[\phi(x,f),y],h\rangle\langle z,g\rangle-\langle y,h\rangle\langle[z,\phi(x,f)],g\rangle\\ &= -(\langle[z,\phi(x,f)],g\rangle\langle y,h\rangle-\langle z,g\rangle\langle[\phi(x,f),y],h\rangle)\\ &= -B_\Omega(y\otimes g,[x\otimes f,z\otimes h]_\Omega)\end{aligned}$$

Finalement, la forme bilinéaire B_Ω est symétrique, nondégénérée et invariante, alors $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*,[.,.]_\Omega,\Omega,B_\Omega)$ est une algèbre Hom-Leibniz multiplicative quadratique. $\square$

L'application ϕ induit une application $T:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, définie par $T(x\otimes y)=\phi(x\otimes y^*)$. D'autre part, pour tout $x,y,z\in\mathfrak{g}$, nous avons $B(T(x\otimes y),z)=B([z,x],y)$, d'où $T(x\otimes y)=-T(y\otimes x)$. Cela signifie que $T:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, par la suite nous pouvons définir un crochet ternaire sur $\mathfrak{g}$ par

$$[x,y,z]:=[T(x\wedge y),z] \tag{3.6.8}$$

$(\mathfrak{g},[.,.,.],B)$ est une algèbre ternaire de Nambu quadratique.

Proposition 3.14. *Avec les mêmes données que la proposition 3.13,* $(\mathfrak{g},\alpha\circ[\cdot,\cdot,\cdot],(\alpha,\alpha),B_\alpha)$ *est une algèbre ternaire Hom-Nambu multiplicative quadratique , où* $B_\alpha(x,y)=B(\alpha(x),y)$.

3.7 Centroides et algèbres Hom-Nambu n-aires quadratiques

On montre qu'une algèbre n-aire de Nambu quadratique et un élément inversible du centroide conduisent à une algèbre n-aire Hom-Nambu quadratique.

Théorème 3.15. *Soit $(\mathcal{N}, [\cdot, ..., \cdot], B)$ une algèbre n-aire de Nambu quadratique, $\theta \in Cent_S(\mathcal{N})$ telle que θ est inversible. On considère la forme bilinéaire B_θ donnée par*

$$\begin{array}{rccc} B_\theta : & \mathcal{N} \times \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \longmapsto & B(\theta x, y). \end{array}$$

Alors, $(\mathcal{N}, \{\cdot, ..., \cdot\}_l, (\theta, ..., \theta), B_\theta)$ est une algèbre n-aire Hom-Nambu quadratique.

Démonstration. Il est simple de montrer que B_θ est symétrique et non dégénérée.
On a aussi θ est symétrique relativement à la forme B_θ, en effet

$$B_\theta(\theta x, y) = B(\theta^2 x, y) = B(\theta x, \theta y) = B_\theta(x, \theta y)$$

l'invariance de B_θ est donnée par, soit $l \in \{1, ..., n-1\}$

$$\begin{aligned} B_\theta(\{x_1, ..., x_{n-1}, y\}_l, z) &= B_\theta([\theta x_1, ..., \theta x_l, ..., x_{n-1}, y], z) \\ &= B(\theta[\theta x_1, ..., \theta x_l, ..., x_{n-1}, y], z) \\ &= B([\theta^2 x_1, ..., \theta x_l, ..., x_{n-1}, y], z) \\ &= -B(y, [\theta^2 x_1, ..., \theta x_l, ..., x_{n-1}, z]) \\ &= -B_\theta(y, [\theta x_1, ..., \theta x_l, ..., x_{n-1}, z]) \\ &= -B_\theta(y, \{x_1, ..., x_{n-1}, z\}_l) \end{aligned}$$

D'autre part, lorsque $l = n$ on a $[\theta x_1, ..., \theta x_n] = [\theta^2 x_1, ..., \theta x_{n-1}, x_n]$ comme conséquence des calculs précédents.
Donc $(\mathcal{N}, \{\cdot, ..., \cdot\}_l, (\theta, ..., \theta), B_\theta)$ est une algèbre Hom-Nambu n-aire quadratique.
Notez que B_θ est aussi un produit scalaire invariant d'algèbre de Nambu n-aire $\mathcal{N}$. $\square$

Bibliographie

Bibliographie

[1] Aizawa, N., Sato, H., *q-deformation of the Virasoro algebra with central extension*, Phys. Lett. B 256, no. 1, 185-190 (1991). Hiroshima University preprint preprint HUPD-9012 (1990).

[2] Ammar F., Ejbehi Z. and Makhlouf A., *Cohomology and Deformations of Hom-algebras,* Journal of Lie Theory **21** No. 4, (2011) 813–836.

[3] Ammar F., Mabrouk S. and Makhlouf A., *Representation and cohomology of multiplicative n-ary Hom-Nambu-Lie algebras* , Journal of Geometry and Physics (2011), DOI 10.1016/j.geomphys.2011.04.022.

[4] Ammar F., Mabrouk S. and Makhlouf A., *Quadratic n-ary Hom-Nambu algebras*, e-print arXiv :submit/0335012 (2011).

[5] Ammar F. and Makhlouf A., *Hom-Lie algebras and Hom-Lie admissible superalgebras*, Journal of Algebra, Vol. **324** (7), (2010) 1513–1528.

[6] Ammar F., Makhlouf A. and Silvestrov S., *Ternary q-Virasoro-Witt Hom-Nambu-Lie algebras*, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, **43** (2010) 265204.

[7] Abramov V., Le Roy B. and Kerner. R., *Hypersymmetry : a Z3-graded generalization of supersym- metry*, J. Math. Phys., 38 (3), 1650-1669, (1997).

[8] Arnlind J., Makhlouf and S. Silvestrov, *Ternary Hom-Nambu-Lie algebras induced by Hom-Lie algebras*, Journal of Mathematical Physics, **51**, 043515 (2010) ; doi :10.1063/1.3359004 (2010).

[9] Arnlind J., Makhlouf and S. Silvestrov, *Construction of n-Lie algebras and n-ary Hom-Nambu-Lie algebras*, J. Math. Phys. 52, 123502 (2011) ; doi : 10.1063/1.3653197.

[10] Ataguema H., Makhlouf A. *Deformations of ternary algebras*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, vol. **1,** (2007), 41–45.

[11] Ataguema H., Makhlouf A. *Notes on cohomologies of ternary algebras of associative type*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications **3** no. 3, (2009), 157–174

[12] Ataguema H., Makhlouf A. and Silvestrov S., *Generalization of n-ary Nambu algebras and beyond*, Journal of Mathematical Physics **50**, 1 (2009).

[13] Bai R., An H. and Li. Z., *Centroid structures of n-Lie algebras*, Linear Algebra and its Applications 430 (2009) 229–240.

[14] Bagger J. and Lambert N., *Gauge Symmetry and Supersymmetry of Multiple M2-Branes*, ArXiv :0711.0955, (2007).

[15] Basu A. and Harvey J.A., *The M2-M5 brane system and a generalzed nahm equation*, Nucl. Phys. B **713** (2005).

[16] Benayadi S. and Makhlouf A., *Hom-Lie algebras with symmetric invariant nondegenerate bilinear forms*, e-print arXiv 0113.111 (2010).

[17] Bordemann M., NonDegenerate *invariant bilinear forms in nonassociative algebras*, Acta Math. Univ. Comenian. LXVI (2) (1997), 151–201.

[18] Cassas J.M., Loday J.-L. and Pirashvili *Leibniz n-algebras*, Forum Math. **14** (2002), 189–207.

[19] Carlsson R., N-ary algebras, Nagoya Math. J. 78, 45-56, (1980).

[20] Curtright, T. L., Fairlie D.B., Zachos, C. K., *Ternary Virasoro-Witt algebra*, Phys. Lett. B 666, 386 – 390 (2008).

[21] Daletskii Y.L. and Takhtajan L.A., *Leibniz and Lie Structures for Nambu algebra*, Letters in Mathematical Physics **39** (1997) 127–141.

[22] Daskaloyannis C., *Generalized deformed Virasoro algebras*, Modern Phys. Lett. A 7 no. 9, 809-816 (1992).

[23] De Azcarraga J. A. and Izquierdo J.M. *Cohomology of Filippov algebras and an analogue of Whitehead's lemma*, Journal of Physics : Conference Series 175 (2009) 012001.

[24] De Azcarraga J. A. and Izquierdo J.M. *n-ary algebras : a review with applications*, e-print arXiv 1005.1028 (2010).

[25] Filippov V., *n-Lie algebras*, Sibirsk. Mat. Zh. 26, 126-140 (1985) (English transl. : Siberian Math. J. 26, 879-891 (1985)).

[26] Fialowski A., *Deformations of Lie algebras*, Mat. Sbornyik USSR, 127 (169), (1985), pp. 476–482 ; English translation : Math. USSR-Sb., **55**, (1986), no. 2, 467–473

[27] Fialowski A., Mukherjee G., Naolekar A. *Versal deformation theory of algebras over a quadratic operad*, arXiv :1202.2967 [math.KT] (2012).

[28] Figeueroa-O'Farrill J, *Deformations of 3-algebras*. arXiv :0903.4871v2 (2009).

[29] Filippov V., *n-Lie algebras*, Sibirsk. Mat. Zh. 26, 126-140 (1985) (English transl. : Siberian Math. J. 26, 879-891 (1985)).

[30] Y. Frégier, A. Gohr and S.D. Silvestrov, *Unital algebras of Hom-associative type and surjective or injective twistings*, J. Gen. Lie Theory Appl. Vol. **3** (4), (2009), 285–295.

[31] Frégier Y., Markl M. and Yau D., T*he L°-deformation complex of diagrams of algebras.* New York J. Math. **15** (2009), 353Ð392.

[32] Gautheron P., *Some Remarks Concerning Nambu Mechanics*, Letters in Mathematical Physics **37** (1996) 103–116.

[33] M. Gerstenhaber,*On the deformation of rings and algebras*, Ann of Math.(2) **57** (1963).

[34] M. Gerstenhaber,*The cohomology structure of an associative ring*, Ann of Math., **79** (1963).

[35] Hartwig J. T., Larsson D. and Silvestrov S. D., *Deformations of Lie algebras using σ-derivations*, J. of Algebra 295, 314-361 (2006).

[36] Kontsevich M. and Soibelman Y. *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conf«erence Mosh«e Flato 1999, Vol. I , 255Ð307, Math. Phys. Stud., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[37] Jacobson N., *Lie and Jordan triple systems*, Amer. J. Math. 71, 149-170 (1949).

[38] Kerner R., *Ternary algebraic structures and their applications in physics*, in the "Proc. BTLP 23rd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics", ArXiv math-ph/0011023, (2000).

[39] Kerner R., *Z3-graded algebras and non-commutative gauge theories*, dans le livre "Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformations", Eds. Z. Oziewicz, B. Jancewicz, A. Borowiec, pp. 349-357, Kluwer Academic Publishers (1993).

[40] Kerner R., *The cubic chessboard : Geometry and physics, Classical Quantum Gravity* 14, A203-A225 (1997).

[41] Larsson D. and Silvestrov S. D. : *Quasi-Hom-Lie algebras, Central Extensions and 2-cocycle-like identities,* J. of Algebra **288**, 321–344 (2005).

[42] Larsson D. and Silvestrov S. D., *Quasi-Lie algebras, in "Noncommutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics"*, Contemp. Math., 391, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 241-248 (2005).

[43] Larsson D. and Silvestrov S. D., *Quasi-deformations of* $sl_2(\mathbb{F})$ *using twisted derivations*, Comm. in Algebra 35 , 4303 - 4318 (2007).

[44] Larsson T. A., *Virasoro 3-algebra from scalar densities*, arXiv :0806.4039 , (2008).

[45] Lister W. G., *Ternary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 154, 37-55 (1971).

[46] Loday J.L. and Pirashvili T., *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** 139–158 (1993).

[47] Loos O., *Assoziative tripelsysteme*, Manuscripta Math. 7, 103-112 (1972).

[48] Makhlouf A., *Paradigm of Nonassociative Hom-algebras and Hom-superalgebras*, *Proceedings of Jordan Structures in Algebra and Analysis Meeting*, Eds : J. Carmona Tapia, A. Morales Campoy, A. M. Peralta Pereira, M. I. Ramírez Álvarez, Publishing house : Circulo Rojo, (145–177).

[49] Makhlouf A. and Silvestrov S. D., *Hom-algebra structures*, J. Gen. Lie Theory Appl. **2** (2) , 51–64 (2008).

[50] Makhlouf A. and Silvestrov S. D., *Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras*, Published as Chapter 17, pp 189-206, S. Silvestrov, E. Paal, V. Abramov, A. Stolin, (Eds.), Generalized Lie theory in Mathematics, Physics and Beyond, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2008).

[51] Makhlouf A. and Silvestrov S. D., *Notes on Formal deformations of Hom-Associative and Hom-Lie algebras*, Forum Mathematicum, vol. **22** (4) (2010), 715–739.

[52] Makhlouf A. and Silvestrov S. D., *Hom-Algebras and Hom-Coalgebras*, Journal of Algebra and Its Applications Vol. **9** (4), (2010) 553–589.

[53] Medina A. and Revoy Ph., *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4 18, (1985) 553–561.

[54] Merkulov S. and Vallette B., *Deformation theory of representations of prop(erad)s.* I. J. Reine Angew. Math. **634** (2009), 51–106.

[55] Nambu Y., *Generalized Hamiltonian mechanics*, Phys. Rev. D7 (1973), 2405-2412.

[56] Okubo S. *Triple products and Yang-Baxter equation (I) : Octonionic and quaternionic triple systems*, J. Math.Phys.

[57] Sheng Y., *Representations of hom-Lie algebras*, Algebra and Representation Theory, DOI :10.1007/s10468-011-9280-8 (2011).

[58] Takhtajan L., *On foundation of the generalized Nambu mechanics*, Comm. Math. Phys. **160** (1994), 295-315.

[59] Takhtajan L., *A higher order analog of Chevally-Eilenberg complex and deformation theory of n-algebras*, St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 429-438.

[60] Takhtajan L., *Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra*, Letters in Mathematical Physics **39 :** 127-141, (1997). 34 (1993), 3273–3291.

[61] Yau D., *Enveloping algebra of Hom-Lie algebras*, J. Gen. Lie Theory Appl. 2 (2), 95-108 (2008).

[62] Yau D., *Hom-algebras and homology,* J. Lie Theory **19** (2009) 409–421.

[63] Yau D., *On n-ary Hom-Nambu and Hom-Nambu-Lie algebras*, e-print arXiv :1004.2080v1 (2010).

[64] Yau D., *on n-ary Hom-Nambu and Hom-Maltsev algebras*, e-print arXiv :1004.4795v1 (2010).

[65] Yau D., *A Hom-associatve analogue of n-ary Hom-Nambu algebras*, e-print arXiv :1005.2373v1 (2010).

Annexe : Quadratic Color Hom-Lie algebras

\AM@currentdocname .png

.png

\AM@currentdocname .png

.png